Série n° 4

Analyse I — Travaux Dirigés

Fonctions dérivables et applications

Énoncés des exercices

Exercice 1 : Théorème de Rolle et racines de polynômes

Soit $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\cdots(X - \alpha_n)$ un polynôme de degré $n \geq 2$, où les α_i sont des réels distincts tels que :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

1. Montrer que le polynôme dérivé P' admet au moins $n - 1$ racines réelles distinctes. En déduire qu'elles sont toutes réelles.
2. On considère la fonction auxiliaire $f(x) = P(x)e^x$. En utilisant f, démontrer que le polynôme $S = P + P'$ admet également au moins $n - 1$ racines réelles distinctes.
3. Démontrer enfin que toutes les racines de $P + P'$ sont réelles.

Exercice 2 : Valeurs intermédiaires et théorème de Rolle

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation :

$$\tan(x) + \frac{\pi}{4} = 0$$

admet une solution unique sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

2. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f définie par :

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1$$

sur l'intervalle $[0, \pi]$, montrer que l'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0, \pi[$.

Exercice 3 : Nombre de racines d'un polynôme

Soit $n \geq 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme défini par :

$$P(X) = X^n + pX + q$$

1. Démontrer que P admet au plus 3 racines réelles distinctes.
2. On suppose que n est pair. Démontrer que P admet au plus 2 racines réelles distinctes.

Exercice 4 : Polynôme et exponentielle

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ possède un nombre fini de solutions réelles.

Exercice 5 : Théorème des accroissements finis

1. Démontrer que pour tous réels x et y :
$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$$
2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$:
$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$
3. Montrer que pour tous réels x et y :
$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Exercice 6 : Encadrements du logarithme

1. Soit $f(t) = \ln(t)$. En appliquant le TAF sur $[k, k+1]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
2. Montrer que pour tout $x > 0$:
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 7 : Suite définie par le logarithme

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. (a) Soit $g(x) = f(x) - x$. Montrer que $g'(0) = 0$ et que $g'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En déduire que 0 est l'unique point fixe de f sur $[0, +\infty[$.

   (b) Montrer que $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$, puis que $0 < u_{n+1} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer f' et montrer que $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$ sur $[0, 1]$. Existe-t-il une constante $q < 1$ telle que $|f'(x)| \leq q$ pour tout $x \in [0, u_n]$ et tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier.
3. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]0, u_n[$ tel que
$$u_{n+1} = f'(c_n)u_n = \frac{u_n}{1+c_n}.$$
   En déduire $\dfrac{u_n}{1+u_n} < u_{n+1} < u_n$.
4. Montrer que (u_n) converge, puis déterminer sa limite en utilisant la continuité de f.