Série n° 4

Analyse I — Travaux Dirigés

Fonctions dérivables et applications

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 : Théorème de Rolle et racines de polynômes

Soit $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$ un polynôme de degré $n \geq 2$, où les α_i sont des réels distincts tels que :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

1. Montrer que le polynôme dérivé P' admet au moins $n - 1$ racines réelles distinctes. En déduire qu'elles sont toutes réelles.
2. On considère la fonction auxiliaire $f(x) = P(x)e^x$. En utilisant f, démontrer que le polynôme $S = P + P'$ admet également au moins $n - 1$ racines réelles distinctes.
3. Démontrer enfin que toutes les racines de $P + P'$ sont réelles.

Corrigé de l'exercice 1

1. Le polynôme P est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, considérons l'intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. On a $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$. D'après le **Théorème de Rolle**, il existe au moins un réel $c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.

   Comme les intervalles $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, nous avons trouvé au moins $n-1$ racines réelles distinctes pour P'. Or, P est de degré n, donc P' est de degré $n - 1$. Un polynôme de degré $n - 1$ possède au plus $n - 1$ racines (réelles ou complexes).
   Ainsi P' possède exactement $n - 1$ racines, et elles sont toutes réelles et distinctes.

2. **Racines de $S = P + P'$** : Considérons la fonction auxiliaire $f(x) = P(x)e^x$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

   $$f'(x) = P'(x)e^x + P(x)e^x = (P(x) + P'(x))e^x = S(x)e^x$$

   Comme $P(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a également $f(\alpha_i) = 0$. En appliquant le **Théorème de Rolle** à f sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ($n - 1$ intervalles), il existe $d_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f'(d_i) = 0$. Comme $e^{d_i} \neq 0$, cela implique $S(d_i) = 0$. On trouve ainsi au moins $n-1$ **racines réelles distinctes** pour S.

3. **Réalité de la n-ième racine** : Le polynôme $S = P + P'$ est à coefficients réels et de degré n. Nous avons déjà établi l'existence de $n - 1$ racines réelles distinctes $d_1, \ldots, d_{n-1}$.

   Soit d_0 la dernière racine manquante dans $\mathbb{C}$. Supposons par l'absurde que d_0 soit complexe non réelle ($d_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Comme $S \in \mathbb{R}[X]$, si d_0 est une racine, alors son conjugué $\overline{d_0}$ est également une

racine de S. Puisque d_0 n'est pas réelle, on a $d_0 \neq \overline{d_0}$. Cela signifierait que S possède au moins deux racines supplémentaires, ce qui porterait le nombre total de racines à :

$$(n-1)+2 = n+1$$

Ceci est absurde car un polynôme de degré n ne peut pas avoir plus de n racines. Par conséquent, la racine d_0 est nécessairement **réelle**.

Exercice 2 : Valeurs intermédiaires et théorème de Rolle

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation :

$$\tan(x) + \frac{\pi}{4} = 0$$

admet une solution unique sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

2. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f définie par :

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1$$

sur l'intervalle $[0, \pi]$, montrer que l'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0, \pi[$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Considérons la fonction $h(x) = \tan(x) + \frac{\pi}{4}$ sur l'intervalle $I = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

   (a) La fonction tan est continue sur tout intervalle où elle est définie. Comme $\frac{\pi}{2} \notin I$, h est continue sur I.

   (b) $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\pi}{4} \approx -0,21 < 0$ (car $\pi < 4$).
   $h(\pi) = \tan(\pi) + \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} > 0$.

   (c) Puisque h est continue et que $h(\frac{3\pi}{4}) \cdot h(\pi) < 0$, d'après le **TVI**, il existe au moins un réel $x_0 \in]\frac{3\pi}{4}, \pi[$ tel que $h(x_0) = 0$.

   (d) La dérivée de h est $h'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Pour tout $x \in I$, $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur I, ce qui garantit l'**unicité** de la solution.

2. Soit $f(x) = e^x \sin(x) - 1$ sur $[0, \pi]$.

   (a) f est continue sur $[0, \pi]$.

   (b) f est dérivable sur $]0, \pi[$.

   (c) $f(0) = e^0 \sin(0) - 1 = -1$ et $f(\pi) = e^\pi \sin(\pi) - 1 = -1$.

   Comme $f(0) = f(\pi)$, d'après le **théorème de Rolle**, il existe au moins un réel $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

   L'équation $f'(c) = 0$ devient $e^c(\sin(c) + \cos(c)) = 0$. Puisque $e^c > 0$ pour tout c, on a nécessairement $\sin(c) + \cos(c) = 0$. L'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0$ admet donc bien au moins une solution dans $]0, \pi[$.

Exercice 3 : Nombre de racines d'un polynôme

Soit $n \geq 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme défini par :

$$P(X) = X^n + pX + q$$

1. Démontrer que P admet au plus 3 racines réelles distinctes.
2. On suppose que n est pair. Démontrer que P admet au plus 2 racines réelles distinctes.

Corrigé de l'exercice 3

Si $n = 2$, P est de degré 2 : les deux conclusions sont immédiates. Supposons désormais $n \geq 3$ et posons $P(X) = X^n + pX + q$.

1. Supposons que P possède k racines réelles distinctes. Par applications successives du théorème de Rolle :

   P' possède au moins $k-1$ racines réelles.

   P'' possède au moins $k-2$ racines réelles.

   Or, $P''(X) = n(n-1)X^{n-2}$. Cette dérivée seconde ne s'annule qu'en $x = 0$ (au plus une valeur). On a donc $k - 2 \leq 1$, ce qui implique $k \leq 3$. Le polynôme P admet donc au plus **3 racines réelles**.

2. **Cas où n est pair** : Si n est pair, alors $n-1$ est impair. La fonction $P'(x) = nx^{n-1} + p$ est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée $P''(x)$ est positive et ne s'annule qu'en 0). Étant strictement monotone, P' s'annule au plus **une fois** sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Rolle, si P avait 3 racines, P' en aurait au moins 2. Par conséquent, P admet au plus **2 racines réelles**.

Exercice 4 : Polynôme et exponentielle

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ possède un nombre fini de solutions réelles.

Corrigé de l'exercice 4

Si $P = 0$, l'équation $P(x) = e^x$ n'a aucune solution car $e^x > 0$. Supposons donc $P \neq 0$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - P(x)$.

La dérivée d'ordre $n+1$ de f est $f^{(n+1)}(x) = e^x$, car la dérivée d'ordre $n+1$ d'un polynôme de degré n est nulle.

Puisque $f^{(n+1)}(x) = e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}$ ne s'annule jamais.

D'après le théorème de Rolle, si une fonction possède k racines, sa dérivée en possède au moins $k-1$. Par conséquent, $f^{(n)}$ possède au plus 1 racine, $f^{(n-1)}$ au plus 2 racines, et par itération, f possède au plus $n+1$ racines.

L'équation $P(x) = e^x$ admet donc un nombre fini de solutions réelles.

Exercice 5 : Théorème des accroissements finis

1. Démontrer que pour tous réels x et y :

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$$

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$:

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

3. Montrer que pour tous réels x et y :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Corrigé de l'exercice 5

Si $x = y$, les deux inégalités portant sur x et y sont immédiates. Supposons $x \neq y$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \arctan(t)$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est donnée par $f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $1 + t^2 \geq 1$, donc $|f'(t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

D'après le **Théorème des Accroissements Finis (TAF)**, pour tous réels x et y, il existe c compris entre x et y tel que :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

En passant à la valeur absolue :

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|$$

Comme $|f'(c)| \leq 1$, on en déduit :

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$$

Considérons la fonction $g(t) = e^t$ sur l'intervalle $[0, x]$ avec $x > 0$. g est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. D'après le TAF, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c) \implies \frac{e^x - 1}{x} = e^c$$

Comme $c > 0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, on a $e^c > e^0 = 1$. Ainsi, $\frac{e^x-1}{x} \geq 1$, d'où $e^x - 1 \geq x$.

Comme $c \leq x$, on a $e^c \leq e^x$. Ainsi, $\frac{e^x-1}{x} \leq e^x$, d'où $e^x - 1 \leq xe^x$.

Le cas $x = 0$ est trivial ($0 \leq 0 \leq 0$). On conclut que pour tout $x \geq 0$:

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

Soit $h(t) = \sin(t)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(t) = \cos(t)$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\cos(t)| \leq 1$, nous appliquons l'**Inégalité des Accroissements Finis (IAF)** : Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et que $|f'| \leq M$, alors pour tous $x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Ici, avec $M = 1$, nous obtenons immédiatement :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Exercice 6 : Encadrements du logarithme

1. Soit $f(t) = \ln(t)$. En appliquant le TAF sur $[k, k+1]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
2. Montrer que pour tout $x > 0$:
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Corrigé de l'exercice 6

1. **Étude sur** $[k, k+1]$ **:** Soit $f(t) = \ln(t)$. f est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. D'après le TAF, $\exists c \in]k, k+1[$ tel que :
$$\ln(k+1) - \ln(k) = f'(c)(k+1-k) = \frac{1}{c}$$
Or, $k < c < k+1 \implies \frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k}$. D'où :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
2. **Encadrement de** $\ln(1+x)$ **:** Appliquons le TAF à $f(t) = \ln(t)$ sur $[1, 1+x]$ pour $x > 0$. $\exists d \in]1, 1+x[$ tel que :
$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{(1+x)-1} = f'(d) = \frac{1}{d} \implies \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{d}$$
Comme $1 < d < 1+x$, alors $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{d} < 1$. En multipliant par $x > 0$:
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 7 : Suite définie par le logarithme

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. (a) Soit $g(x) = f(x) - x$. Montrer que $g'(0) = 0$ et que $g'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En déduire que 0 est l'unique point fixe de f sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$, puis que $0 < u_{n+1} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer f' et montrer que $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$ sur $[0, 1]$. Existe-t-il une constante $q < 1$ telle que $|f'(x)| \leq q$ pour tout $x \in [0, u_n]$ et tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier.
3. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]0, u_n[$ tel que
$$u_{n+1} = f'(c_n)u_n = \frac{u_n}{1+c_n}.$$
En déduire $\dfrac{u_n}{1+u_n} < u_{n+1} < u_n$.
4. Montrer que (u_n) converge, puis déterminer sa limite en utilisant la continuité de f.

Corrigé de l'exercice 7

1. (a) Pour tout $x \geq 0$,
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$
Donc $g'(0) = 0$ et $g'(x) < 0$ si $x > 0$. Par le théorème des accroissements finis, g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $g(0) = 0$, l'équation $f(x) = x$, équivalente à $g(x) = 0$, admet pour unique solution $x = 0$.

   (b) Pour $x > 0$, $g(x) < g(0) = 0$, donc $\ln(1+x) < x$. Par ailleurs, $\ln(1+x) > 0$. Partant de $u_0 = 1$, une récurrence donne alors $0 < u_{n+1} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La dérivée est $f'(x) = 1/(1+x)$. Pour $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq 1+x \leq 2$, d'où $1/2 \leq f'(x) \leq 1$. Une constante $q < 1$ ne peut pas majorer $|f'|$ sur $[0, u_n]$, puisque cet intervalle contient 0 et que $f'(0) = 1$.

3. La fonction f est continue sur $[0, u_n]$ et dérivable sur $]0, u_n[$, avec $u_n > 0$. Le TAF fournit donc $c_n \in]0, u_n[$ tel que
$$f(u_n) - f(0) = f'(c_n)u_n = \frac{u_n}{1+c_n}.$$
Or $f(0) = 0$ et $f(u_n) = u_{n+1}$. Comme $0 < c_n < u_n$,
$$\frac{1}{1+u_n} < \frac{1}{1+c_n} < 1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{u_n}{1+u_n} < u_{n+1} < u_n.$$

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$. La continuité de f permet de passer à la limite dans la récurrence :
$$\ell = \ln(1+\ell).$$
D'après la première question, 0 est l'unique point fixe de f.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Rectification de l'énoncé initial. La majoration $u_n \leq (1/2)^n$ est fausse dès $n = 1$, car $u_1 = \ln 2 > 1/2$. La majoration par $(3/4)^n$ proposée dans l'ancien corrigé est également fausse en général : le TAF donne $u_{n+1}/u_n = 1/(1+c_n) \to 1$ puisque $0 < c_n < u_n \to 0$. Il n'existe donc pas de facteur de contraction uniforme $q < 1$ pour cette suite.