UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :
Sciences Mathématiques (SM)
Analyse II

Analyse II

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025–2026**

Table des matières

2 Intégrale de Riemann **1**

2.1 Construction des Intégrales de Darboux 1

2.1.1 Les ensembles de sommes 1

2.1.2 Existence des bornes (Propriété de $\mathbb{R}$) 1

2.1.3 Définition des Intégrales Inférieure et Supérieure 2

2.2 Fonctions Riemann-intégrables 2

2.2.1 Définition fondamentale 2

2.2.2 Notation de l'intégrale 3

2.2.3 Critère d'intégrabilité (Critère de Riemann) 3

2.3 Convergence et Pas de la subdivision 3

2.3.1 Un contre-exemple : La fonction de Dirichlet 5

Symboles et abréviations

Symbole/Abbréviation	Description
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Q}$	Ensemble des rationnels
$\lfloor x \rfloor$	Valeur absolue
$\sup(E)$	Bornes supérieure de E
$\inf(E)$	Bornes inférieure de E
$\mathcal{S}$	L'ensemble de toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$
$\delta(S)$	**Pas** de la subdivision S
$\mathbf{1}_A(x)$	**Fonction indicatrice** de A
$\sigma(\varphi, S)$	**Somme de Darboux inférieure**
$\Sigma(\varphi, S)$	**Somme de Darboux supérieure**
$R(\varphi, S, \xi)$	**Somme de Riemann**

Chapitre

2 Intégrale de Riemann

2.1 Construction des Intégrales de Darboux

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. Il existe donc deux réels m et M tels que :

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq \varphi(x) \leq M$$

2.1.1 Les ensembles de sommes

Pour construire l'intégrale, nous considérons l'ensemble de **toutes** les valeurs possibles prises par les sommes de Darboux lorsque l'on fait varier la subdivision.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$. Nous définissons deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

1. L'ensemble des sommes inférieures :

$$\mathcal{A} = \{\sigma(\varphi, S) \mid S \in \mathcal{S}\}$$

2. L'ensemble des sommes supérieures :

$$\mathcal{B} = \{\Sigma(\varphi, S) \mid S \in \mathcal{S}\}$$

2.1.2 Existence des bornes (Propriété de $\mathbb{R}$)

Pour définir l'intégrale, nous devons prendre le supremum de $\mathcal{A}$ et l'infimum de $\mathcal{B}$. Justifions rigoureusement leur existence.

Proposition 2.1.1: Existence

Les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. **Justification par les propriétés de $\mathbb{R}$:**

Pour les sommes inférieures ($\mathcal{A}$) :

Non vide : Il existe au moins une subdivision (par exemple la subdivision triviale $S = \{a, b\}$), donc $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Majoré : Pour toute subdivision S, on a $\sigma(\varphi, S) \leq M(b-a)$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc majoré par $M(b-a)$.

Or, une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (l'axiome de la borne supérieure) affirme que *« Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure finie »*.

Donc $\sup_{S\in\mathcal{S}}(\mathcal{A})$ existe.

Pour les sommes supérieures ($\mathcal{B}$) :

Non vide : De même, $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Minoré : Pour toute subdivision S, on a $\Sigma(\varphi, S) \geq m(b-a)$. L'ensemble $\mathcal{B}$ est donc minoré par $m(b-a)$.

De même, *« Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure finie »*.

Donc $\inf_{S\in\mathcal{S}}(\mathcal{B})$ existe.

■

2.1.3 Définition des Intégrales Inférieure et Supérieure

Ces bornes, dont nous venons de prouver l'existence, constituent les définitions exactes des intégrales de Darboux.

Définition 2.1.1:

On définit :

L'**intégrale inférieure** de φ (ou somme inférieure de Darboux) par :

$$\underline{I}(\varphi) = \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(\varphi, S)$$

L'**intégrale supérieure** de φ (ou somme supérieure de Darboux) par :

$$\overline{I}(\varphi) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(\varphi, S)$$

On a toujours la relation d'ordre :

$$m(b-a) \leq \underline{I}(\varphi) \leq \overline{I}(\varphi) \leq M(b-a)$$

2.2 Fonctions Riemann-intégrables

Nous avons vu que pour toute fonction bornée φ, on a l'inégalité $\underline{I}(\varphi) \leq \overline{I}(\varphi)$. Le cas idéal correspond à la situation où il n'y a pas d'écart entre l'estimation par défaut et l'estimation par excès.

2.2.1 Définition fondamentale

Définition 2.2.1: Fonction Riemann-intégrable

Soit φ une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$. On dit que φ est **Riemann-intégrable** (ou intégrable au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si et seulement si ses intégrales de Darboux inférieure et supérieure sont égales :

$$\underline{I}(\varphi) = \overline{I}(\varphi)$$

2.2.2 Notation de l'intégrale

Définition 2.2.2: L'intégrale de Riemann

Si φ est Riemann-intégrable, la valeur commune de l'intégrale inférieure et de l'intégrale supérieure est appelée **intégrale de Riemann** de φ sur $[a, b]$. On la note :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \underline{I}(\varphi) = \overline{I}(\varphi)$$

2.2.3 Critère d'intégrabilité (Critère de Riemann)

En pratique, il est difficile de calculer exactement $\underline{I}$ et $\overline{I}$. On utilise plutôt une caractérisation équivalente basée sur l'approximation (conséquence des propriétés de la borne supérieure et inférieure).

Proposition 2.2.1: Critère de Riemann

Une fonction bornée φ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists S \in \mathcal{S} \quad \text{telle que} \quad \Sigma(\varphi, S) - \sigma(\varphi, S) < \varepsilon$$

Interprétation : Cela signifie que l'on peut trouver une subdivision telle que l'aire de l'erreur (la zone rouge de nos graphiques précédents) soit aussi petite que l'on veut.

2.3 Convergence et Pas de la subdivision

Jusqu'à présent, nous avons défini l'intégrale via des bornes supérieures et inférieures sur l'ensemble de *toutes* les subdivisions. En pratique, on souhaite obtenir l'intégrale par un passage à la limite sur le "finesse" du découpage.

On note $\delta(S)$ le **pas** de la subdivision S (la plus grande longueur d'un intervalle du découpage).

Proposition 2.3.1: Convergence des sommes

Si la fonction φ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors l'intégrale est la limite commune des sommes de Darboux et des sommes de Riemann lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

On a les égalités suivantes :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\delta(S)\to 0} \sigma(\varphi, S) = \lim_{\delta(S)\to 0} \Sigma(\varphi, S)$$

Et plus généralement, pour tout choix de points ξ (somme de Riemann) :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\delta(S)\to 0} R(\varphi, S, \xi)$$

Ce résultat est très puissant : il affirme que peu importe comment on découpe l'intervalle (tant que les morceaux deviennent minuscules) et peu importe où on choisit les points, la somme convergera vers l'intégrale.

Théorème 2.3.1: (Équivalence de Darboux-Riemann)

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.
$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall S,$$
$$\delta(S) < \eta \Longrightarrow \begin{cases} |\sigma(\varphi, S) - L| < \varepsilon, \\ |\Sigma(\varphi, S) - L| < \varepsilon. \end{cases}$$

2.
$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall S,\ \forall \xi,$$
$$\delta(S) < \eta \Longrightarrow |R(\varphi, S, \xi) - L| < \varepsilon,$$

où $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Dans ce cas, φ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,dx = L.}$$

Remarque 1:Cas pratique : Subdivision uniforme

En utilisant une subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n}$ (qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$), l'intégrale s'obtient comme la limite de la somme de Riemann classique :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Exemple 1:La fonction carré

Calculons $I = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Soit $\varphi(x) = x^2$ sur $[0, 1]$. On utilise la subdivision régulière $x_k = \frac{k}{n}$.

La somme de Riemann s'écrit :

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Rappel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

En remplaçant dans l'expression de S_n :

$$R_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

Exemple 2:La fonction exponentielle

Calculons $I = \int_0^1 e^x \, dx$. Soit $\varphi(x) = e^x$ sur $[0,1]$. Subdivision régulière : $x_k = \frac{k}{n}$.

La somme de Riemann s'écrit :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

Rappel : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Ici $q = e^{1/n}$, donc :

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}} = (e-1) \cdot \frac{1/n}{e^{1/n}-1}$$

Rappel : $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$.

Passage à la limite : En posant $u = 1/n$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = (e-1) \times 1 = e-1$$

2.3.1 Un contre-exemple : La fonction de Dirichlet

Pour bien comprendre les limites de l'intégrale de Riemann, il est essentiel d'étudier une fonction qui n'est pas intégrable.

Exemple 3:La fonction indicatrice des rationnels

Considérons la fonction f, définie sur $[0,1]$, qui vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Nous allons démontrer que cette fonction n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Soit $S = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ une subdivision quelconque de $[0,1]$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, notons $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ l'intervalle élémentaire de la subdivision.

Calcul des sommes inférieures. Commençons par évaluer l'infimum de la fonction sur chaque intervalle. Puisque l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'intersection $I_k \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est non vide. Il existe donc au moins un irrationnel b dans I_k.

Par définition de la fonction, $f(b) = 0$. Par conséquent, pour tout intervalle I_k, on a $\inf_{x\in I_k} f(x) = 0$.

La somme de Darboux inférieure est alors nulle :

$$\sigma(f, S) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \cdot 0 = 0$$

On en déduit que l'intégrale inférieure est $\underline{I}(f) = \sup_S \sigma(f, S) = 0$.

Calcul des sommes supérieures. Le raisonnement est symétrique pour les sommes supérieures. La densité de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ assure que l'intersection $I_k \cap \mathbb{Q}$ est non vide. Il existe donc au moins un rationnel r dans chaque intervalle I_k, pour lequel $f(r) = 1$. Ainsi, le supremum de la fonction sur tout intervalle est $\sup_{x\in I_k} f(x) = 1$.

La somme de Darboux supérieure correspond donc à la somme des longueurs des intervalles :

$$\Sigma(f, S) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \cdot 1 = t_m - t_0 = 1 - 0 = 1$$

L'intégrale supérieure vaut donc $\overline{I}(f) = \inf_S \Sigma(f, S) = 1$.

Conclusion. Nous constatons que l'intégrale inférieure (qui vaut 0) est strictement différente de l'intégrale supérieure (qui vaut 1). La condition d'égalité n'étant pas respectée, la fonction de Dirichlet n'est pas Riemann-intégrable.