**UNIVERSITÉ MOHAMED V**
**FACULTÉ DES SCIENCES RABAT**
**Département de Mathématiques**

# Filière :
# Sciences Mathématiques (SM)
# Analyse II

## Analyse II

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma

**Toute remarque de votre part est la bienvenue.**
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025–2026**

# Table des matières


**3 Intégrale et primitive. Calculs d'intégrales** **1**

3.1 Intégrabilité des fonctions continues . . . 1
3.1.1 Continuité uniforme et théorème de Heine . . . 1
3.1.2 Des petites variations à une petite erreur d'aire . . . 2
3.2 Propriétés de l'intégrale et lecture géométrique . . . 3
3.2.1 Linéarité, ordre et relation de Chasles . . . 3
3.2.2 Valeur moyenne . . . 4
3.2.3 Aire algébrique et aire géométrique . . . 5
3.3 Primitives et théorème fondamental de l'analyse . . . 5
3.3.1 La notion de primitive . . . 5
3.3.2 La fonction intégrale : accumuler une aire . . . 6
3.3.3 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive . . . 7
3.3.4 Dériver une intégrale à bornes variables . . . 7
3.4 Primitives usuelles et calculs directs . . . 8
3.4.1 Table des primitives . . . 8
3.4.2 Reconnaître une dérivée composée . . . 8
3.5 Intégration par parties . . . 9
3.5.1 Formule et démonstration . . . 9
3.5.2 Une lecture géométrique : partager un rectangle . . . 9
3.6 Changement de variable . . . 10
3.6.1 Formule et justification . . . 10
3.6.2 Méthode et exemples . . . 11
3.7 Autres méthodes de calcul . . . 11
3.7.1 Symétries et périodicité . . . 11
3.7.2 Décomposition d'une fraction rationnelle . . . 12
3.7.3 Calculer l'aire entre deux courbes . . . 12

# Symboles et abréviations

| Symbole/Abbréviation | Description |
|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | Ensemble des entiers |
| $\mathbb{N}$ | Ensemble des entiers naturels |
| $\mathbb{Q}$ | Ensemble des rationnels |
| $\lfloor x \rfloor$ | Valeur absolue |
| $\sup(E)$ | Bornes supérieure de $E$ |
| $\inf(E)$ | Bornes inférieure de $E$ |
| $\mathcal{S}$ | L'ensemble de toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$ |
| $\delta(S)$ | **Pas** de la subdivision $S$ |
| $\mathbf{1}_A(x)$ | **Fonction indicatrice** de $A$ |
| $\sigma(\varphi, S)$ | **Somme de Darboux inférieure** |
| $\Sigma(\varphi, S)$ | **Somme de Darboux supérieure** |
| $R(\varphi, S, \xi)$ | **Somme de Riemann** |

Chapitre

# 3 Intégrale et primitive Calculs d'intégrales

Les deux premiers chapitres ont construit l'intégrale à partir des aires de rectangles. Nous savons maintenant reconnaître une fonction intégrable grâce à l'écart entre ses sommes de Darboux. Une question se pose : **comment passer de cette construction géométrique à des méthodes de calcul efficaces ?**

Nous montrons d'abord que toute fonction continue sur un segment est intégrable. Puis nous relions l'aire accumulée à la dérivation. Ce lien conduit aux primitives, à l'intégration par parties et au changement de variable.

**Notations conservées.** Pour $S = (s_0, \dots, s_n)$, subdivision de $[a, b]$, on note $I_k = [s_{k-1}, s_k]$, $\delta(S) = \max_k(s_k - s_{k-1})$, et

$$\sigma(\varphi, S) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \inf_{I_k} \varphi, \qquad \Sigma(\varphi, S) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{I_k} \varphi.$$

Dans ce chapitre, $a < b$ sont des réels. Les intégrales sur un segment réduit à un point sont nulles.

## 3.1 Intégrabilité des fonctions continues

### 3.1.1 Continuité uniforme et théorème de Heine

La continuité en un point permet de contrôler les variations de la fonction près de ce point. Pour contrôler simultanément tous les rectangles d'une subdivision, nous avons besoin d'un même choix de distance sur tout le segment.

**Définition 3.1.1: Continuité uniforme**

Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **uniformément continue** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, x' \in [a, b], \qquad |x - x'| \leq \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \varepsilon.$$

Le nombre $\delta$ dépend de $\varepsilon$, mais il ne dépend pas du point $x$.

**Théorème 3.1.1: Heine**

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ y est uniformément continue.

*Démonstration.* Supposons que $\varphi$ soit continue mais ne soit pas uniformément continue. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, on puisse choisir $x_n, y_n \in [a,b]$ vérifiant

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, \qquad |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| > \varepsilon_0.$$

La suite $(x_n)$ est bornée. Le théorème de Bolzano–Weierstrass donne une sous-suite $(x_{n_j})$ convergeant vers un réel $\ell \in [a,b]$. Comme $|y_{n_j} - x_{n_j}| \leq 1/n_j$, on a aussi $y_{n_j} \to \ell$. La continuité en $\ell$ entraîne

$$\varphi(x_{n_j}) \to \varphi(\ell), \qquad \varphi(y_{n_j}) \to \varphi(\ell).$$

Ainsi $|\varphi(x_{n_j}) - \varphi(y_{n_j})| \to 0$, en contradiction avec le choix de $\varepsilon_0$. ■

**Exemple 1:Un contrôle valable sur tout un segment**

Pour $\varphi(x) = x^2$ sur $[0,2]$, on a

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| = |x - x'|\,|x + x'| \leq 4|x - x'|.$$

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, le choix $\delta = \varepsilon/4$ convient simultanément pour tous les points de $[0,2]$.

### 3.1.2 Des petites variations à une petite erreur d'aire

**Théorème 3.1.2: Intégrabilité des fonctions continues**

Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur ce segment.

*Démonstration.* Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $\eta = \varepsilon/(2(b-a))$. Par le théorème de Heine, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x'| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \eta.$$

Choisissons une subdivision $S$ de pas $\delta(S) \leq \delta$. Sur chaque $I_k$, la fonction atteint son minimum $m_k$ et son maximum $M_k$. Les points où ils sont atteints sont distants d'au plus $\delta$ ; donc $0 \leq M_k - m_k \leq \eta$. Il vient

$$\begin{aligned} \Sigma(\varphi, S) - \sigma(\varphi, S) &= \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})(M_k - m_k) \\ &\leq \eta \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) = \eta(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Le critère de Riemann établi au chapitre 2 donne l'intégrabilité de $\varphi$. ■

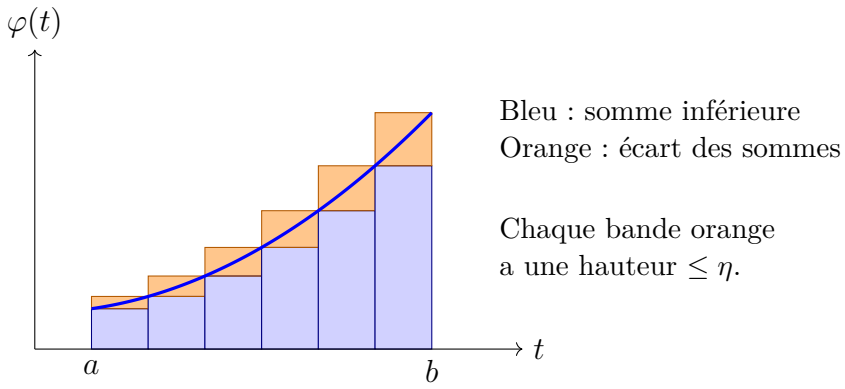



**Figure 3.1** – L'erreur totale est au plus $(b-a)\eta$. Un découpage assez fin rend cette aire aussi petite que souhaité.

**Conséquence.** Les polynômes, les fonctions exponentielles, trigonométriques et les fonctions rationnelles sans pôle sur le segment sont intégrables sur ce segment. L'existence de l'intégrale ne suppose pas que l'on sache déjà calculer une primitive.

## 3.2 Propriétés de l'intégrale et lecture géométrique

### 3.2.1 Linéarité, ordre et relation de Chasles

Dans toute cette section, $\varphi$ et $\psi$ sont continues sur $[a,b]$. Les fonctions $\alpha\varphi+\beta\psi$ et $|\varphi|$ sont donc intégrables.

**Proposition 3.2.1: Règles de calcul sur un segment**

Pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et tout $c\in[a,b]$, on a :

$$\int_a^b(\alpha\varphi+\beta\psi)(t)\,\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b\psi(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $\varphi(t)\leq\psi(t)$ pour tout $t\in[a,b]$, alors

$$\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\leq\int_a^b\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Démonstration.* Pour une même subdivision et les mêmes points $\xi_k$, les sommes de Riemann vérifient la linéarité et préservent les inégalités, puisque les longueurs $s_k-s_{k-1}$ sont positives. Le passage à la limite donne les première et troisième propriétés. Pour Chasles, réunissons une subdivision de $[a,c]$ et une de $[c,b]$. La somme sur $[a,b]$ est la somme des deux sommes partielles. En faisant tendre leurs pas vers zéro, on obtient l'égalité annoncée. ■

**Définition 3.2.1: Orientation des bornes**

On pose

$$\int_a^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t=0,\qquad\int_b^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Avec cette convention, la relation de Chasles reste valable quel que soit l'ordre des trois points, dès que la fonction est continue entre eux.

**Proposition 3.2.2: Encadrement et majoration**

Si $m \leq \varphi(t) \leq M$ sur $[a,b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a).$$

En particulier,

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Si $|\varphi(t)| \leq K$, alors pour tous $x, y \in [a,b]$,

$$\left|\int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq K|y-x|.$$

*Démonstration.* Le premier encadrement résulte de l'ordre appliqué aux fonctions constantes $m$ et $M$. En intégrant $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$, on obtient la deuxième inégalité. On applique ensuite celle-ci au segment délimité par $x$ et $y$, puis on utilise l'orientation des bornes si $y < x$. ■

### 3.2.2 Valeur moyenne

**Théorème 3.2.1: Formule de la moyenne**

Si $\varphi$ est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

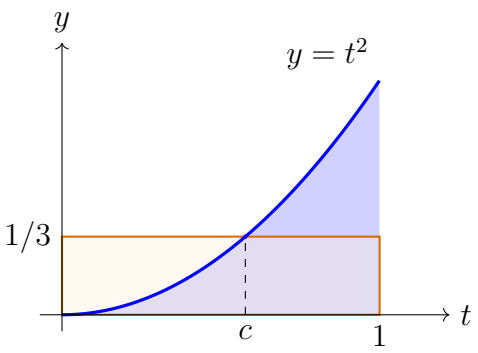
$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\varphi(c).$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est la **valeur moyenne** de $\varphi$ sur $[a,b]$.

*Démonstration.* Posons $m = \min_{[a,b]} \varphi$ et $M = \max_{[a,b]} \varphi$. L'encadrement précédent donne

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq M.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi$ prend toute valeur comprise entre $m$ et $M$. Elle prend donc sa valeur moyenne en un point $c$. ■




Aire sous la courbe : $1/3$
Aire du rectangle : $1 \times 1/3$
$c^2 = 1/3$, donc $c = 1/\sqrt{3}$.

**Figure 3.2** – La valeur moyenne est la hauteur d'un rectangle de même aire algébrique.

### 3.2.3 Aire algébrique et aire géométrique

L'intégrale compte positivement les zones situées au-dessus de l'axe et négativement celles qui sont au-dessous. Une aire géométrique est toujours positive. Ainsi, pour des fonctions continues,

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t}, \qquad \boxed{\mathcal{A}_{\varphi,\psi} = \int_a^b |\varphi(t) - \psi(t)|\,\mathrm{d}t}.$$

Pour calculer ces aires, on repère les zéros ou les intersections, puis on sépare le segment en intervalles où le signe est constant.

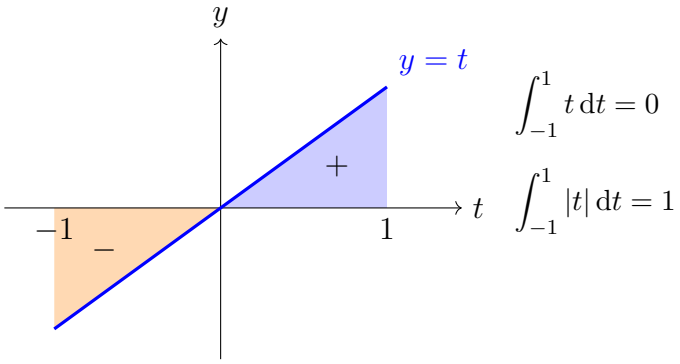



**Figure 3.3** – Deux triangles de même aire : les contributions algébriques se compensent, les aires géométriques s'ajoutent.

## 3.3 Primitives et théorème fondamental de l'analyse

### 3.3.1 La notion de primitive

**Définition 3.3.1: Primitive**

Soit $\varphi$ définie sur un intervalle $I$. Une **primitive** de $\varphi$ sur $I$ est une fonction $F$ dérivable sur $I$ telle que $F' = \varphi$. Sur un segment, les dérivées aux extrémités se comprennent à droite en $a$ et à gauche en $b$.

**Proposition 3.3.1: Deux primitives diffèrent d'une constante**

Si $F$ et $G$ sont deux primitives de $\varphi$ sur un même intervalle $I$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in I$.

*Démonstration.* La fonction $H = G - F$ vérifie $H' = 0$. Pour deux points $x < y$ de $I$, le théorème des accroissements finis donne $H(y) - H(x) = H'(c)(y - x) = 0$. Ainsi $H$ est constante sur $I$. ■

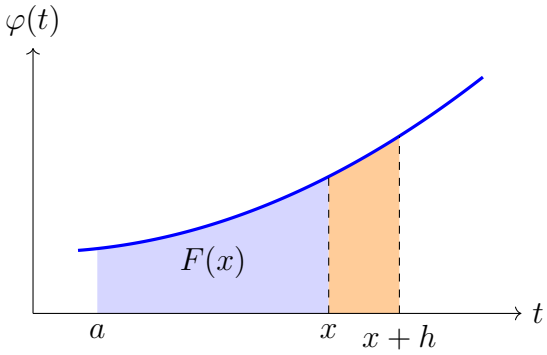
**Exemple.** Les primitives de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto x^3/3 + C$. La constante déplace verticalement le graphe de la primitive, sans changer ses pentes.

### 3.3.2 La fonction intégrale : accumuler une aire

Soit $\varphi$ continue sur $[a,b]$. À chaque $x \in [a,b]$, associons

$$F(x) = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette fonction décrit l'aire algébrique accumulée lorsque la borne droite se déplace de $a$ jusqu'à $x$. En particulier, $F(a) = 0$.




Bande orange :
$F(x+h) - F(x)$

Largeur : $h > 0$
Hauteur voisine de $\varphi(x)$.

**Figure 3.4** – Quand $h$ est petit, l'aire ajoutée est voisine de $h\varphi(x)$. C'est l'idée géométrique de $F'(x) = \varphi(x)$.

**Théorème 3.3.1: Théorème fondamental de l'analyse**

Si $\varphi$ est continue sur $[a,b]$, la fonction

$$F(x) = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et $F'(x) = \varphi(x)$. Les dérivées unilatérales aux extrémités vérifient également cette égalité. Ainsi, toute fonction continue sur un segment possède une primitive.

*Démonstration.* **Continuité.** Puisque $\varphi$ est bornée, il existe $K \geq 0$ tel que $|\varphi(t)| \leq K$. Par Chasles,

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq K|y - x|.$$

Le membre de droite tend vers zéro quand $y \to x$ : $F$ est continue.

**Dérivabilité.** Fixons $x \in ]a,b[$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de $\varphi$ en $x$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\varphi(t) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ dès que $|t - x| \leq \delta$, avec $t \in [a,b]$. Pour $0 < |h| \leq \delta$ et $x + h \in [a,b]$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \varphi(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \big(\varphi(t) - \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}t.$$

L'estimation précédente, valable aussi si $h < 0$, donne

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \varphi(x) \right| \leq \frac{\varepsilon |h|}{|h|} = \varepsilon.$$

Donc $F'(x) = \varphi(x)$. Le même argument avec $h > 0$ en $a$, ou $h < 0$ en $b$, prouve les égalités aux extrémités. ∎

**Remarque 1:Existence et expression explicite**

La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$, même si l'on ne dispose pas d'une expression de cette primitive à l'aide des fonctions usuelles du cours.

### 3.3.3 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

**Théorème 3.3.2: Formule de Newton–Leibniz**

Si $\varphi$ est continue sur $[a,b]$ et si $\Phi$ est une primitive de $\varphi$, alors

$$\boxed{\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b) - \Phi(a) = \Big[\Phi(t)\Big]_a^b.}$$

*Démonstration.* La fonction $F(x) = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $\varphi$. Donc $\Phi - F$ est constante. En évaluant cette constante en $a$, on obtient $\Phi(x) - F(x) = \Phi(a)$, d'où le résultat pour $x = b$. ■

**Exemple 2:Retrouver les calculs du chapitre 2**

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}, \qquad \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = [e^t]_0^1 = e - 1.$$

Les résultats obtenus par les sommes de Riemann sont retrouvés directement.

**Exemple 3:Le logarithme comme aire orientée**

Pour $x > 0$,

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Les deux membres sont des primitives de $1/x$ sur $]0,+\infty[$ et s'annulent en 1. Si $0 < x < 1$, la valeur est négative car les bornes sont inversées.

### 3.3.4 Dériver une intégrale à bornes variables

Si $\varphi$ est continue sur un intervalle contenant les valeurs de deux fonctions dérivables $u$ et $v$, alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) = \varphi(v(x))v'(x) - \varphi(u(x))u'(x).}$$

En effet, si $\Phi$ est une primitive de $\varphi$, l'intégrale vaut $\Phi(v(x)) - \Phi(u(x))$ ; on dérive ensuite les deux fonctions composées.

**Exemple 4:Une intégrale que l'on dérive sans la calculer**

Pour $H(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$H'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}.$$

- Le facteur $2x$ provient de la dérivée de la borne supérieure $x^2$.

## 3.4 Primitives usuelles et calculs directs

### 3.4.1 Table des primitives

Dans le tableau, une seule primitive est indiquée ; on peut lui ajouter une constante. Chaque formule s'utilise sur un intervalle où elle est définie.

| Fonction | Une primitive | Domaine ou condition |
|---|---|---|
| $x^p$ | $\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ | $x>0$, $p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ |
| $x^n$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ |
| $1/x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | Intervalle ne contenant pas 0 |
| $e^{kx}$ | $e^{kx}/k$ | $k\neq 0$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $1/(1+x^2)$ | $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ |
| $1/\sqrt{1-x^2}$ | $\arcsin x$ | $]-1,1[$ |

### 3.4.2 Reconnaître une dérivée composée

Si $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivable à dérivée continue), la dérivation des fonctions composées donne

$$\int u'(x)e^{u(x)}\,\mathrm{d}x = e^{u(x)}+C, \qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert u(x)\rvert + C \quad (u\neq 0).$$

La notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne ici les primitives, et non une intégrale entre deux bornes.

**Exemple 5:Deux reconnaissances directes**

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \ln 2,$$
$$\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Dans le second calcul, le facteur $1/2$ compense la dérivée $2x$ de $x^2$.

## 3.5 Intégration par parties

### 3.5.1 Formule et démonstration

La règle $(uv)' = u'v + uv'$ permet de transformer une intégrale contenant un produit en une autre intégrale, parfois plus simple.

**Théorème 3.5.1: Intégration par parties**

Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors

$$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.}$$

*Démonstration.* Intégrons l'identité $(uv)' = u'v + uv'$. Par Newton–Leibniz,

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il suffit d'isoler le deuxième terme. ■

**Choix pratique.** On cherche $u$ dont la dérivée simplifie l'expression, et $v'$ dont on connaît facilement une primitive. On écrit les quatre quantités $u$, $u'$, $v'$ et $v$ avant d'appliquer la formule.

**Exemple 6:Produit d'un polynôme et d'une exponentielle**

Prenons $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = e^t$ et $v(t) = e^t$. Alors

$$\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e - (e-1) = 1.$$

**Exemple 7:Une fonction logarithme**

Pour $x > 0$, on écrit $\ln x = (\ln x) \times 1$. Avec $u = \ln x$ et $v = x$,

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

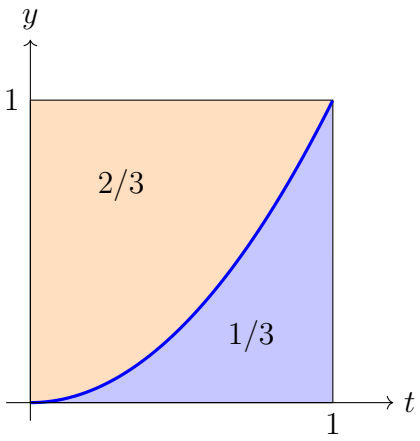
Par exemple, $\displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^e = 1$.

### 3.5.2 Une lecture géométrique : partager un rectangle

Pour $u(t) = t$ et $v(t) = t^2$ sur $[0, 1]$, la formule donne

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\,(2t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Le carré unité se partage en une région sous $y = t^2$ d'aire $1/3$ et une région complémentaire d'aire $2/3$. La formule traduit cette décomposition.




Aire du carré : 1

Somme des deux régions :
$1/3 + 2/3 = 1$.

**Figure 3.5** – L'intégration par parties relie deux contributions dont la somme est le terme de bord $[uv]_0^1$.

## 3.6 Changement de variable

### 3.6.1 Formule et justification

**Théorème 3.6.1: Changement de variable sur un segment**

Soit $\varphi$ continue sur un intervalle $J$, et $u : [\alpha, \beta] \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Cette formule reste vraie lorsque $u$ est décroissante ; les bornes sont alors orientées.

*Démonstration.* Soit $\Phi$ une primitive de $\varphi$ sur $J$, obtenue par le théorème fondamental. La dérivée de $\Phi \circ u$ est $(\varphi \circ u)u'$. Ainsi

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(u(\beta)) - \Phi(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

**Interprétation géométrique.** Un petit intervalle de largeur $\Delta t$ devient un intervalle de largeur voisine de $u'(t)\Delta t$. Le facteur $u'(t)$ corrige la largeur des rectangles. Pour une fonction croissante, les largeurs gardent leur signe ; pour une fonction décroissante, leur orientation est renversée.

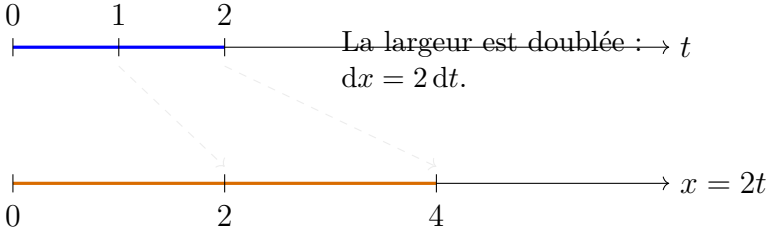



**Figure 3.6** – Pour $x = 2t$, la hauteur devient $\varphi(2t)$ et la largeur est multipliée par 2.

### 3.6.2 Méthode et exemples

On indique la substitution, sa dérivée et les nouvelles bornes. Après le changement de variable, toute l'intégrale s'écrit avec la nouvelle variable.

**Exemple 8:Une substitution polynomiale**

Calculons $I = \int_0^1 2t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Posons $x = 1 + t^2$ ; alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, et les bornes deviennent 1 et 2. Ainsi

$$I = \int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

**Exemple 9:Un changement décroissant**

Posons $x = 1 - t$ dans $I = \int_0^1 e^{1-t}\,\mathrm{d}t$. Lorsque $t$ va de 0 à 1, $x$ va de 1 à 0 et $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Donc

$$I = -\int_1^0 e^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - 1.$$

**Exemple 10:L'aire d'un quart de disque**

Dans $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, posons $x = \sin t$, avec $0 \le t \le \pi/2$. Sur cet intervalle, $\cos t \ge 0$, donc $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Ainsi

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

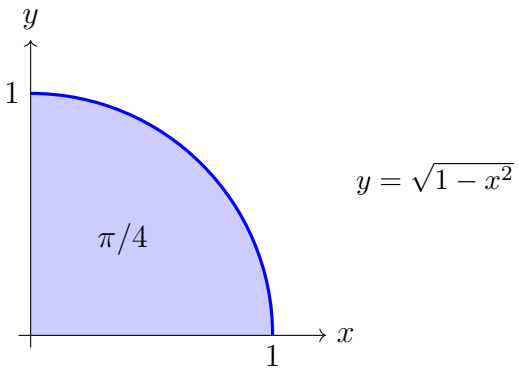



**Figure 3.7** – Le calcul intégral retrouve l'aire du quart de disque unité.

## 3.7 Autres méthodes de calcul

### 3.7.1 Symétries et périodicité

**Proposition 3.7.1: Utiliser une symétrie**

Soit $A > 0$ et $\varphi$ continue sur $[-A, A]$.

— Si $\varphi$ est paire, alors $\int_{-A}^{A} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^A \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

— Si $\varphi$ est impaire, alors $\displaystyle\int_{-A}^{A} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Si $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de période $T > 0$, alors, pour tout réel $a$,

$$\int_a^{a+T} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Démonstration.* Le changement $t = -u$ donne $\int_{-A}^{0} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \varphi(-u)\,\mathrm{d}u$. On utilise ensuite la parité et Chasles. Pour la dernière assertion, la fonction $G(a) = \int_a^{a+T} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée $G'(a) = \varphi(a+T) - \varphi(a) = 0$ ; elle est donc constante. ■

**Exemples.** $\int_{-2}^{2} t^3 \cos t\,\mathrm{d}t = 0$ par imparité, et $\int_a^{a+2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi$ pour tout $a$.

### 3.7.2 Décomposition d'une fraction rationnelle

**Exemple 11:Décomposer avant d'intégrer**

Sur $[0,1]$, on écrit

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

On obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln\frac{4}{3}.$$

### 3.7.3 Calculer l'aire entre deux courbes

**Exemple 12:Entre la droite et la parabole**

Les courbes $y = x$ et $y = x^2$ se rencontrent en $x = 0$ et $x = 1$. Sur $[0,1]$, on a $x^2 \le x$. L'aire comprise entre elles vaut donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

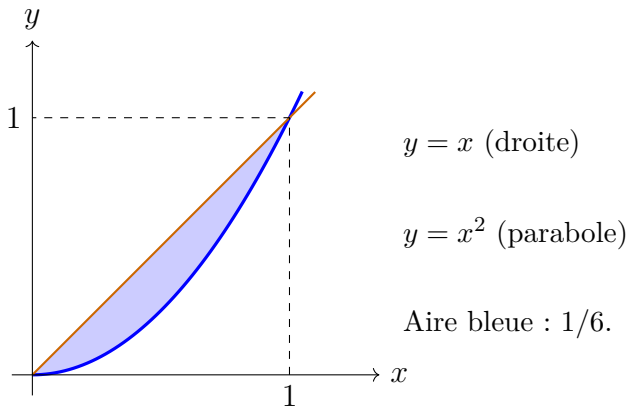



**Figure 3.8** – La hauteur d'une bande verticale est « courbe supérieure moins courbe inférieure ».