UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :
Sciences Mathématiques (SM)
Analyse II

Analyse II

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025–2026**

Table des matières

4 Intégrales généralisées **1**

4.1 Pourquoi généraliser l'intégrale ? . . . 1
4.1.1 Une région qui s'étend jusqu'à l'infini . . . 1
4.1.2 Une hauteur qui devient infinie . . . 2
4.2 Définitions et premières propriétés . . . 2
4.2.1 Une borne infinie . . . 2
4.2.2 Une borne finie singulière . . . 3
4.2.3 Plusieurs bornes ou points singuliers . . . 4
4.2.4 Linéarité et découpage . . . 5
4.3 Intégrales de référence . . . 5
4.3.1 Les puissances à l'infini . . . 5
4.3.2 Les puissances près d'une borne finie . . . 5
4.3.3 Une référence exponentielle . . . 6
4.4 Intégrales de fonctions positives . . . 6
4.4.1 Une aire croissante converge si elle reste bornée . . . 6
4.4.2 Théorème de comparaison . . . 7
4.4.3 Équivalents et comparaison par quotient . . . 7
4.5 Fonctions de signe quelconque . . . 8
4.5.1 Convergence absolue . . . 8
4.5.2 Le critère de Cauchy : contrôler les aires lointaines . . . 9
4.5.3 Une convergence due aux compensations . . . 9
4.6 Calcul des intégrales généralisées . . . 10
4.6.1 La règle : tronquer, calculer, passer à la limite . . . 10
4.6.2 Intégration par parties avec une borne impropre . . . 11
4.6.3 Changement de variable avec une borne impropre . . . 11
4.7 Méthode d'étude et estimation du reste . . . 12
4.7.1 Organiser une étude de nature . . . 12
4.7.2 Quelle erreur fait-on en tronquant ? . . . 13
4.8 Exercices d'application et corrections . . . 13
4.8.1 Énoncés . . . 13
4.8.2 Corrections détaillées . . . 14

Symboles et abréviations

Symbole/Abbréviation	Description
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Q}$	Ensemble des rationnels
$\lfloor x \rfloor$	Valeur absolue
$\sup(E)$	Bornes supérieure de E
$\inf(E)$	Bornes inférieure de E
$\mathcal{S}$	L'ensemble de toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$
$\delta(S)$	**Pas** de la subdivision S
$\mathbf{1}_A(x)$	**Fonction indicatrice** de A
$\sigma(\varphi, S)$	**Somme de Darboux inférieure**
$\Sigma(\varphi, S)$	**Somme de Darboux supérieure**
$R(\varphi, S, \xi)$	**Somme de Riemann**

Chapitre 4

Intégrales généralisées

Au chapitre 3, l'intégrale d'une fonction continue était calculée sur un segment $[a, b]$. Deux nouvelles situations apparaissent : l'intervalle peut s'étendre jusqu'à l'infini, ou la fonction peut devenir non bornée près d'une extrémité.

L'idée reste géométrique : **on calcule d'abord une aire sur un segment, puis on étudie sa limite**. Une région non bornée peut avoir une aire finie. Il faut cependant justifier cette limite avant de lui attribuer une valeur.

Cadre du chapitre. Nous travaillons avec des fonctions continues sur les intervalles considérés, sauf éventuellement aux points signalés comme singuliers. Toutes les intégrales tronquées sont ainsi des intégrales de Riemann sur des segments, étudiées dans les chapitres précédents.

4.1 Pourquoi généraliser l'intégrale ?

4.1.1 Une région qui s'étend jusqu'à l'infini

Pour $R > 1$, le chapitre 3 permet d'écrire

$$\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1 - \frac{1}{R}.$$

Lorsque $R \to +\infty$, cette aire tend vers 1. La région sous $y = 1/x^2$ à droite de 1 a donc une aire finie, bien qu'elle s'étende sans limite.

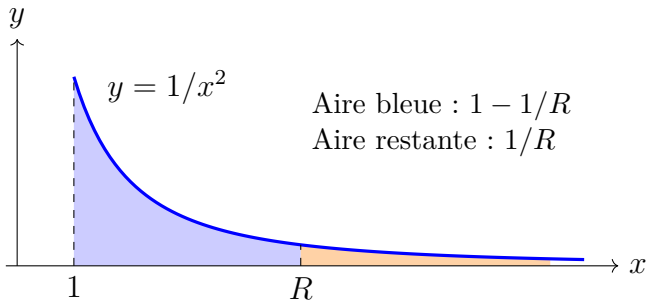


Figure 4.1 – La limite des aires tronquées vaut 1. Seule une partie du reste orange est représentée ; il se prolonge jusqu'à l'infini.

4.1.2 Une hauteur qui devient infinie

Pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^{1} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \longrightarrow 2.$$

La courbe monte indéfiniment près de 0, mais la limite de l'aire existe. En revanche,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln \varepsilon \longrightarrow +\infty.$$

Ces deux exemples montrent qu'une singularité ne suffit pas, à elle seule, à décider de la convergence.

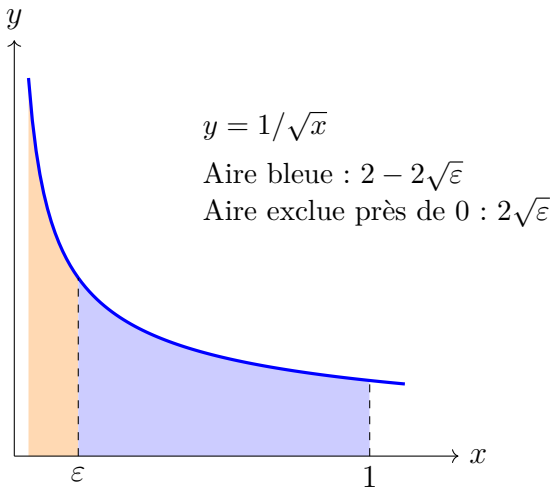


Figure 4.2 – La zone exclue près de 0 devient étroite : son aire tend vers zéro, malgré la hauteur non bornée. Le haut de la courbe est tronqué sur le dessin.

4.2 Définitions et premières propriétés

4.2.1 Une borne infinie

Définition 4.2.1: Intégrale sur $[a, +\infty[$

Soit $\varphi : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale

$$\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

converge si la limite

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{a}^{R} \varphi(x)\, dx$$

existe et appartient à $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on pose

$$\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{a}^{R} \varphi(x)\, dx.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge. La divergence peut notamment se produire lorsque cette limite vaut $+\infty$, vaut $-\infty$, ou n'existe pas.

Une limite infinie n'est donc pas une valeur d'intégrale convergente. De même, pour une fonction continue sur $]-\infty, b]$, on étudie

$$\lim_{A\to-\infty}\int_A^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 1:La limite de la fonction ne décide pas tout

Les fonctions $1/x$ et $1/x^2$ tendent toutes deux vers zéro à l'infini. Pourtant,

$$\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln R \longrightarrow +\infty, \qquad \int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1 - \frac{1}{R} \longrightarrow 1.$$

Le fait que $\varphi(x) \to 0$ ne suffit donc pas à assurer la convergence.

De plus, considérons la fonction $\varphi(x) = \sin x$. On a

$$\int_1^R \sin x\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \cos R.$$

Or, la limite

$$\lim_{R\to+\infty}(\cos 1 - \cos R)$$

n'existe pas, car $\cos R$ oscille entre -1 et 1. Par conséquent,

$$\int_1^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x \text{ diverge.}$$

Cette divergence est due à l'absence de limite finie, et non à une tendance vers $+\infty$ ou $-\infty$.

4.2.2 Une borne finie singulière

Définition 4.2.2: Intégrale sur $]a, b]$ ou sur $[a, b[$

Si φ est continue sur $]a, b]$, on dit que $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge lorsque

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

existe et est finie. Cette limite est alors la valeur de l'intégrale généralisée. Si φ est continue sur $[a, b[$, on utilise de même

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 1:Un simple trou dans la définition

Si φ admet une limite finie en la borne manquante, on peut la prolonger par continuité. L'intégrale généralisée converge alors et coïncide avec l'intégrale usuelle du prolongement. Par exemple, $\sin x/x$ a un prolongement continu en 0, de valeur 1.

4.2.3 Plusieurs bornes ou points singuliers

Définition 4.2.3: Étudier chaque difficulté séparément

Pour φ continue sur $\mathbb{R}$, on fixe $c \in \mathbb{R}$ et l'on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

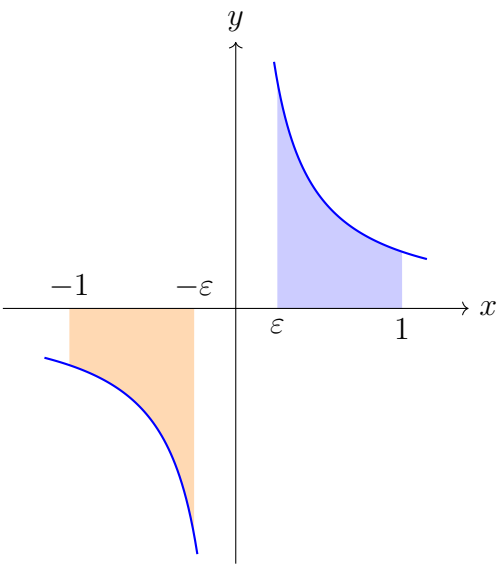
à condition que les deux intégrales convergent séparément. De même, pour une singularité intérieure $c \in]a,b[$, on étudie séparément $\int_a^c \varphi$ et $\int_c^b \varphi$. Pour deux bornes finies singulières, on coupe en un point intérieur ordinaire.

Exemple 2:Une compensation trompeuse

La fonction $1/x$ est singulière en 0. Pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\varepsilon \to -\infty, \qquad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln\varepsilon \to +\infty.$$

L'intégrale généralisée sur $[-1,1]$ diverge, bien que la somme des deux intégrales tronquées symétriquement soit toujours nulle. On ne peut pas donner un sens à $-\infty+(+\infty)$ par cette compensation.



$y = 1/x$

À gauche : divergence vers $-\infty$.
À droite : divergence vers $+\infty$.

Figure 4.3 – Des troncatures symétriques peuvent masquer deux divergences. Chaque côté doit avoir une limite finie.

4.2.4 Linéarité et découpage

Proposition 4.2.1: Propriétés héritées des intégrales tronquées

Si $\int_a^{+\infty} \varphi$ et $\int_a^{+\infty} \psi$ convergent, alors, pour tous réels α et β,

$$\int_a^{+\infty} (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_a^{+\infty} \varphi + \beta \int_a^{+\infty} \psi.$$

Pour tout $c > a$, la convergence de $\int_a^{+\infty} \varphi$ équivaut à celle de $\int_c^{+\infty} \varphi$, et, en cas de convergence,

$$\int_a^{+\infty} \varphi = \int_a^{c} \varphi + \int_c^{+\infty} \varphi.$$

Des énoncés analogues valent aux bornes finies singulières.

Démonstration. On applique la linéarité et Chasles sur $[a, R]$, avec $R > c$, puis on passe à la limite. Le terme $\int_a^c \varphi$ est un nombre réel fixe ; il ne change donc pas l'existence d'une limite finie. ■

4.3 Intégrales de référence

4.3.1 Les puissances à l'infini

Théorème 4.3.1: Intégrales de Riemann à l'infini

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Si $\alpha > 1$, sa valeur est $1/(\alpha - 1)$.

Démonstration. Pour $\alpha \neq 1$ et $R > 1$,

$$\int_1^R x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{R^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}.$$

Si $\alpha > 1$, alors $R^{1-\alpha} \to 0$ et la limite vaut $1/(\alpha-1)$. Si $\alpha < 1$, alors $R^{1-\alpha} \to +\infty$ et l'intégrale diverge vers $+\infty$. Pour $\alpha = 1$, l'intégrale tronquée vaut $\ln R \to +\infty$. ■

4.3.2 Les puissances près d'une borne finie

Théorème 4.3.2: Intégrales de Riemann au voisinage de zéro

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Si $\alpha < 1$, sa valeur est $1/(1 - \alpha)$.

Démonstration. Pour $\alpha \neq 1$,

$$\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Si $\alpha < 1$, alors $\varepsilon^{1-\alpha} \to 0$ et la limite est finie. Si $\alpha > 1$, l'expression tend vers $+\infty$. Enfin, pour $\alpha = 1$, on a $-\ln \varepsilon \to +\infty$. ■

Par translation, $\int_a^b (x-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (b-x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ ont une singularité intégrable à la borne correspondante exactement lorsque $\alpha < 1$.

Intégrale	Convergence	Cas limite
$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$	$\alpha > 1$	$\alpha = 1$: divergence
$\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$: divergence

Attention au lieu étudié. À l'infini, on demande une décroissance assez rapide. Près de zéro, on demande une explosion assez lente. Il n'existe donc aucun α pour lequel $\int_0^{+\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge : les deux conditions seraient incompatibles.

4.3.3 Une référence exponentielle

Pour $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^R e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda R}}{\lambda} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}.$$

Ainsi $\int_a^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ converge. Par exemple, $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1/2$.

4.4 Intégrales de fonctions positives

4.4.1 Une aire croissante converge si elle reste bornée

Proposition 4.4.1: Critère de majoration des aires

Soit $\varphi \geq 0$, continue sur $[a, +\infty[$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi$ converge si et seulement si les nombres $\int_a^R \varphi$, pour $R \geq a$, sont majorés par un même réel.

Démonstration. Posons $A(R) = \int_a^R \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Pour $R_2 \geq R_1$,

$$A(R_2) - A(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

La fonction A est croissante. Si elle est majorée, notons L la borne supérieure de ses valeurs. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe R_0 tel que $L - \varepsilon < A(R_0) \leq L$. Pour $R \geq R_0$, on a donc $L - \varepsilon < A(R) \leq L$, ce qui prouve $A(R) \to L$. Réciproquement, si A converge vers un réel L, sa croissance implique $A(R) \leq L$ pour tout R. ■

Pour une fonction positive, l'aire tronquée a donc toujours une limite finie ou égale à $+\infty$. Le même raisonnement s'applique près d'une borne finie lorsque le domaine d'intégration s'agrandit vers cette borne.

4.4.2 Théorème de comparaison

Théorème 4.4.1: Comparer deux fonctions positives

Soient φ et ψ continues sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'à partir d'un certain $A \geq a$, $0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$.

- Si $\int_a^{+\infty} \psi$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \varphi$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} \varphi$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} \psi$ diverge.

Les mêmes implications valent près d'une borne finie singulière.

Démonstration. Pour $R \geq A$, l'ordre donne $0 \leq \int_A^R \varphi \leq \int_A^R \psi$. Si la dernière intégrale reste majorée, celle du milieu aussi : on applique le critère précédent. La seconde implication est la contraposée de la première. La partie sur $[a, A]$ n'affecte pas la convergence. ■

Exemple 3:Prouver la convergence sans primitive

Pour $x \geq 1$, on a $x^2 \geq x$, donc

$$0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge aussi ; la partie sur $[0, 1]$ est une intégrale ordinaire. Nous n'avons pas besoin de calculer sa valeur.

Exemple 4:Prouver une divergence par minoration

Pour $x \geq 1$, $1 + x \leq 2x$, donc

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{2x}.$$

L'intégrale de $1/(2x)$ sur $[1, +\infty[$ diverge. Celle de $1/(1+x)$ diverge donc également.

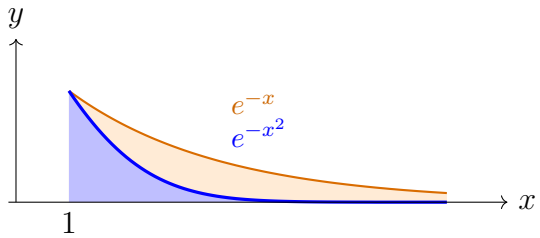


Figure 4.4 – Pour $x \geq 1$, la petite aire bleue est contenue dans une aire finie sous e^{-x}.

4.4.3 Équivalents et comparaison par quotient

Définition 4.4.1: Deux fonctions équivalentes

Si ψ ne s'annule pas près de la borne étudiée, on écrit $\varphi(x) \sim \psi(x)$ lorsque $\varphi(x)/\psi(x) \to 1$ à cette borne.

Théorème 4.4.2: Même nature pour des fonctions positives comparables

Supposons que φ et ψ soient positives près de la borne impropre, avec $\psi > 0$, et que

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \longrightarrow L, \qquad 0 < L < +\infty.$$

Alors les intégrales de φ et de ψ sont de même nature : elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux. C'est en particulier le cas si $\varphi \sim \psi$.

Démonstration. Assez près de la borne, on a

$$\frac{L}{2}\psi(x) \leq \varphi(x) \leq \frac{3L}{2}\psi(x).$$

Deux applications du théorème de comparaison donnent l'équivalence des convergences. ■

Si le quotient tend vers zéro, on peut conclure à la convergence de l'intégrale de φ lorsque celle de ψ converge. **S'il tend vers** $+\infty$, on peut conclure à la divergence de l'intégrale de φ lorsque celle de ψ diverge. Ces conclusions reposent toujours sur la positivité près de la borne.

Exemple 5:Une fraction rationnelle à l'infini

Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{2x+1}{x^3+4} \sim \frac{2}{x^2}.$$

Les fonctions sont positives pour $x \geq 1$. L'intégrale de la fraction rationnelle sur $[1, +\infty[$ converge puisque celle de $2/x^2$ converge.

Exemple 6:Une singularité en zéro

Comme $\ln(1+x)/x \to 1$ quand $x \to 0^+$,

$$\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale sur $]0, 1]$ converge par le critère des puissances près de zéro.

4.5 Fonctions de signe quelconque

4.5.1 Convergence absolue

Définition 4.5.1: Convergence absolue

L'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est **absolument convergente** lorsque $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. On utilise la même définition pour les autres bornes impropres.

Théorème 4.5.1: La convergence absolue entraîne la convergence

Si $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\left|\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^{+\infty} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Posons $\varphi_+ = (|\varphi| + \varphi)/2$ et $\varphi_- = (|\varphi| - \varphi)/2$. Ces deux fonctions sont continues et vérifient $0 \leq \varphi_+, \varphi_- \leq |\varphi|$. Par comparaison, leurs intégrales convergent. Comme $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, l'intégrale de φ converge par linéarité. Enfin, on passe à la limite dans $|\int_a^R \varphi| \leq \int_a^R |\varphi|$. ■

Exemple 7:Domination par une puissance

Pour $x \geq 1$,

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin x/x^2\,\mathrm{d}x$ est donc absolument convergente, et par conséquent convergente.

4.5.2 Le critère de Cauchy : contrôler les aires lointaines

Théorème 4.5.2: Critère de Cauchy à l'infini

Pour φ continue sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \geq a,\ \forall v > u \geq A, \qquad \left|\int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Posons $F(R) = \int_a^R \varphi$. Si $F(R) \to L$, on choisit A tel que $|F(R) - L| < \varepsilon/2$ pour $R \geq A$; alors $|F(v) - F(u)| < \varepsilon$.

Réciproquement, supposons la condition satisfaite. La suite $F(a+n)$ est une suite de Cauchy de réels ; elle converge donc vers un réel L. Pour R assez grand, prenons $n = \lfloor R - a \rfloor$. Les deux points $a+n$ et R sont assez grands pour que $|F(R) - F(a+n)| < \varepsilon/2$ (ou cette différence est nulle). En choisissant aussi n assez grand pour avoir $|F(a+n) - L| < \varepsilon/2$, on obtient $|F(R) - L| < \varepsilon$. Ainsi $F(R) \to L$. ■

Près d'une borne finie b, on remplace les points u, v « assez grands » par deux points « assez proches de b du côté considéré ».

4.5.3 Une convergence due aux compensations

Définition 4.5.2: Semi-convergence

Une intégrale généralisée est **semi-convergente** si elle converge, mais n'est pas absolument convergente.

Exemple 8:L'intégrale de $\sin x/x$ à l'infini

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, tandis que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Démonstration. **Convergence.** Pour $R \geq 1$, une intégration par parties sur $[1, R]$ avec $u = 1/x$ et $v' = \sin x$ donne

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Le terme $\cos R/R$ tend vers zéro. De plus, $|\cos x|/x^2 \leq 1/x^2$, donc la dernière intégrale converge absolument. Le membre de droite admet ainsi une limite finie.

Absence de convergence absolue. Pour tout entier $k \geq 1$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

En sommant ces inégalités pour $k = 1, \ldots, N$, on obtient une minoration par $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} 1/(k+1)$, qui tend vers $+\infty$. En effet, cette somme est au moins $\int_2^{N+2} \mathrm{d}t/t$. L'intégrale de la valeur absolue diverge donc. ■

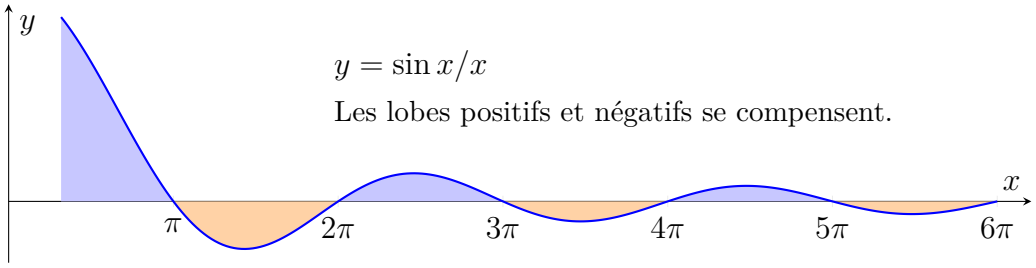


Figure 4.5 – La convergence algébrique peut subsister alors que la somme des aires géométriques est infinie.

4.6 Calcul des intégrales généralisées

4.6.1 La règle : tronquer, calculer, passer à la limite

La formule de Newton–Leibniz s'applique d'abord sur un segment. Si $\Phi' = \varphi$ sur $[a, +\infty[$,

$$\int_a^R \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(R) - \Phi(a).$$

L'intégrale généralisée converge exactement lorsque $\Phi(R)$ admet une limite finie à l'infini. Une borne finie singulière se traite de la même façon. Il faut éviter de substituer directement le symbole $+\infty$ dans une formule.

Exemple 9:Une primitive avec une limite finie

Pour $R > 0$,

$$\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan R.$$

› Comme $\arctan R \to \pi/2$, l'intégrale sur $[0, +\infty[$ converge et vaut $\pi/2$.

4.6.2 Intégration par parties avec une borne impropre

Proposition 4.6.1: Passer à la limite après une intégration par parties

Soient u, v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Si $u(R)v(R)$ admet une limite finie ℓ et si $\int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_a^{+\infty} uv' = \ell - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} u'v.$$

Démonstration. Pour chaque $R > a$, la formule sur $[a, R]$ donne

$$\int_a^R uv' = u(R)v(R) - u(a)v(a) - \int_a^R u'v.$$

Sous les hypothèses, chaque terme du membre de droite a une limite finie. On peut donc passer à la limite. ■

Exemple 10:Un polynôme multiplié par une exponentielle

Sur $[0, R]$, prenons $u = x$, $v' = e^{-x}$, donc $v = -e^{-x}$. Alors

$$\int_0^R xe^{-x}\,\mathrm{d}x = [-xe^{-x}]_0^R + \int_0^R e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - (R+1)e^{-R}.$$

Comme $Re^{-R} \to 0$ et $e^{-R} \to 0$, on conclut que $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Exemple 11:Une singularité logarithmique

Pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon.$$

La limite classique $\varepsilon\ln\varepsilon \to 0$ donne $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = -1$. Sur $]0, 1]$, $|\ln x| = -\ln x$, donc cette intégrale converge absolument.

4.6.3 Changement de variable avec une borne impropre

Proposition 4.6.2: Changement croissant vers l'infini

Soit $u : [\alpha, +\infty[\to [a, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, telle que $u(\alpha) = a$ et $u(T) \to +\infty$. Pour φ continue sur $[a, +\infty[$, les intégrales

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_\alpha^{+\infty} \varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature et, lorsqu'elles convergent, elles ont la même valeur.

Démonstration. Pour tout $T > \alpha$, le chapitre 3 donne

$$\int_{\alpha}^{T} \varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{u(T)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction u est continue, strictement croissante et tend vers $+\infty$: ses valeurs parcourent $[a, +\infty[$. Les deux passages à la limite décrivent donc exactement les mêmes intégrales tronquées. ■

Pour une borne finie singulière ou une substitution décroissante, on repart de la formule sur des segments et l'on suit explicitement le déplacement des bornes.

Exemple 12:Une puissance de logarithme

Pour $p \in \mathbb{R}$, étudions $\int_e^{+\infty} \mathrm{d}x/[x(\ln x)^p]$. Sur $[e, R]$, posons $t = \ln x$, donc $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/x$:

$$\int_e^R \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \int_1^{\ln R} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}.$$

Comme $\ln R \to +\infty$, l'intégrale converge exactement pour $p > 1$. Dans ce cas, elle vaut $1/(p-1)$.

Exemple 13:Relier une borne infinie à une borne finie

Avec $x = 1/t$, pour $R > 1$, on a

$$\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \int_{1/R}^1 t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}t.$$

Le point $+\infty$ devient le point 0^+. La condition de convergence près de zéro est $2-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$: on retrouve exactement le critère à l'infini.

4.7 Méthode d'étude et estimation du reste

4.7.1 Organiser une étude de nature

Déterminer la **nature** d'une intégrale signifie établir sa convergence ou sa divergence ; son calcul exact est une question supplémentaire.

1. Repérer toutes les bornes infinies, les bornes singulières et les singularités intérieures.
2. Découper l'intégrale pour traiter chaque difficulté séparément.
3. Pour une fonction positive, chercher une comparaison ou un équivalent avec une référence.
4. Pour une fonction de signe variable, étudier d'abord la valeur absolue ; si nécessaire, utiliser une intégration par parties ou le critère de Cauchy.
5. Pour calculer la valeur, travailler sur un segment puis justifier chaque limite.

Exemple 14:Deux bornes, deux conditions

Considérons

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (1+x)^\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La fonction est positive et continue sur $]0, +\infty[$. Près de 0, elle est équivalente à $x^{-\alpha}$; il faut donc $\alpha < 1$. À l'infini, elle est équivalente à $x^{-(\alpha+\beta)}$; il faut donc $\alpha + \beta > 1$. Les deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

$$\boxed{I_{\alpha,\beta} \text{ converge } \iff \alpha < 1 \text{ et } \alpha + \beta > 1.}$$

4.7.2 Quelle erreur fait-on en tronquant ?

Si une intégrale converge, son **reste** après R est

$$r(R) = \int_R^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^R \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

En cas de convergence absolue, $|r(R)| \leq \int_R^{+\infty} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$. Ainsi, si $|\varphi(x)| \leq C/x^p$ pour $x \geq R$ et $p > 1$,

$$\boxed{|r(R)| \leq \frac{C}{(p-1)R^{p-1}}.}$$

Cette formule s'obtient en intégrant la fonction de comparaison de R à $+\infty$. Elle permet de choisir une borne de troncature garantissant une précision donnée.

Exemple 15:Contrôler une approximation

Pour $\varphi(x) = \sin x/x^3$ et $R \geq 1$,

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x - \int_1^R \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{2R^2}.$$

Le choix $R \geq \sqrt{500}$ garantit une erreur au plus égale à 10^{-3}.

4.8 Exercices d'application et corrections

4.8.1 Énoncés

1. Étudier la nature et, en cas de convergence, calculer $\int_2^{+\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 x^{-2/3}\,\mathrm{d}x$.
2. Étudier $\int_0^1 \mathrm{d}x/(1-x)$.
3. Étudier $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/\sqrt{x(1+x)}$.
4. Étudier et calculer $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/[\sqrt{x}(1+x)]$.
5. Étudier et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x/(1+x^2)$.
6. Montrer que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.
7. Étudier $\int_1^{+\infty} \sin x/x^{3/2}\,\mathrm{d}x$ et majorer la valeur absolue de son reste après R.
8. Déterminer, suivant $p \in \mathbb{R}$, la nature de $\int_0^{e^{-1}} \mathrm{d}x/[x|\ln x|^p]$.

4.8.2 Corrections détaillées

1. Puissances de référence. À l'infini, $3 > 1$; près de zéro, $2/3 < 1$. Les deux intégrales convergent et

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{8}, \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}} = 3.$$

Ces valeurs viennent respectivement des primitives $-1/(2x^2)$ et $3x^{1/3}$.

2. Singularité en 1. Pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = [-\ln(1-x)]_0^{1-\varepsilon} = -\ln\varepsilon \to +\infty.$$

L'intégrale diverge.

3. Une convergence en zéro et une divergence à l'infini. L'intégrande est positive. Près de 0, $1/\sqrt{x(1+x)} \sim 1/\sqrt{x}$: l'intégrale converge de ce côté. À l'infini, $1/\sqrt{x(1+x)} \sim 1/x$: l'intégrale diverge de ce côté. L'intégrale sur $]0,+\infty[$ diverge donc vers $+\infty$.

4. Les parenthèses changent la nature. Près de 0, $1/[\sqrt{x}(1+x)] \sim x^{-1/2}$; à l'infini, $1/[\sqrt{x}(1+x)] \sim x^{-3/2}$. L'intégrale converge aux deux bornes. Pour $0 < \varepsilon < R$, posons $x = t^2$, avec $t > 0$:

$$\int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2(\arctan\sqrt{R} - \arctan\sqrt{\varepsilon}).$$

En faisant tendre séparément ε vers 0^+ et R vers $+\infty$, on obtient la valeur π.

5. Deux bornes infinies. On étudie séparément les deux demi-droites. Sur $[0,+\infty[$, l'intégrale vaut $\pi/2$ d'après le calcul par arctan. La substitution $x = -t$ montre que l'intégrale sur $]-\infty,0]$ converge aussi et a la même valeur. Leur somme vaut donc π.

6. Deux intégrations par parties. Sur $[0,R]$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^R x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= [-x^2e^{-x}]_0^R + 2\int_0^R xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -R^2e^{-R} + 2\Big(1-(R+1)e^{-R}\Big) \\ &= 2-(R^2+2R+2)e^{-R}.\end{aligned}$$

L'exponentielle domine les puissances : le dernier produit tend vers zéro. L'intégrale converge et vaut 2.

7. Convergence absolue et reste. On a $|\sin x|/x^{3/2} \le x^{-3/2}$ et $3/2 > 1$. L'intégrale est donc absolument convergente. Pour $R \ge 1$,

$$\left|\int_R^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_R^{+\infty} x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{R}}.$$

8. Une singularité logarithmique en zéro. Sur $]0,e^{-1}]$, $|\ln x| = -\ln x$. Posons $t = -\ln x$; alors $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x/x$. Pour $0 < \varepsilon < e^{-1}$,

$$\int_\varepsilon^{e^{-1}} \frac{\mathrm{d}x}{x|\ln x|^p} = \int_1^{-\ln\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}.$$

Comme $-\ln\varepsilon \to +\infty$, l'intégrale converge exactement pour $p > 1$, et vaut alors $1/(p-1)$.

Remarque 2:Les trois questions à distinguer

Existence : la limite des intégrales tronquées est-elle finie ? **Valeur :** peut-on calculer cette limite ? **Précision :** peut-on majorer l'aire restante après une troncature ? Une étude de convergence peut être complète même sans valeur exacte.