Corrigé de la Série 1 : Intégrales des fonctions en escalier

Subdivisions, intégrale, propriétés, sommes de Darboux et de Riemann

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 — Subdivisions et raffinement

Soit $S = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ une subdivision de $[0, 1]$.

1) Calculer le pas $\delta(S)$.

2) Montrer que $S' = (0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ est plus fine que S et déterminer son pas.

3) Donner la subdivision commune la moins fine de S' et $T = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

1) Pas de la subdivision S

Les longueurs successives sont $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$; ainsi

$$\boxed{\delta(S) = \max\left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right\} = \tfrac{1}{2}.}$$

2) Raffinement

Tous les points de S appartiennent à S', donc $S \subset S'$. Les longueurs de S' sont $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. Par suite $\boxed{\delta(S') = \dfrac{1}{4}}$. Le raffinement a réduit le pas.

3) Raffinement commun

La réunion ordonnée des points des deux subdivisions est

$$\boxed{S' \cup T = \left(0, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, 1\right).}$$

Toute subdivision raffinant à la fois S' et T doit contenir ces points.

Exercice 2 — Intégrale d'un escalier et aire algébrique

Sur $[0, 3]$, on considère l'escalier f qui vaut 2 sur $]0, 1[$ et -1 sur $]1, 3[$ (valeurs arbitraires en 0, 1 et 3).

1) Donner une subdivision adaptée à f.

2) Calculer $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^3 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier la relation de Chasles.

1) Subdivision adaptée

$S = (0, 1, 3)$ convient puisque f est constante sur chacun des intervalles ouverts correspondants.

2) Deux aires différentes

Par définition de l'intégrale d'un escalier,

$$\boxed{\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 2(1-0) - 1(3-1) = 0,}$$

$$\boxed{\int_0^3 |f(t)|\,\mathrm{d}t = 2(1-0) + 1(3-1) = 4.}$$

Les valeurs isolées aux points de subdivision n'interviennent pas.

3) Relation de Chasles

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1, \qquad \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t = -1.$$

La somme $1 + (-1) = 0$ retrouve bien $\int_0^3 f = 0$.

Exercice 3 — Escalier défini à l'aide de la partie entière

Soit $f(t) = \lfloor 2t \rfloor$ pour $t \in [0, 2]$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière.

1) Donner une subdivision adaptée et les valeurs de f sur ses intervalles ouverts.

2) Calculer $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) On pose $g(t) = f(t) - \frac{3}{2}$. Calculer $\int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^2 |g(t)|\,\mathrm{d}t$.

1) Valeurs de l'escalier

La subdivision adaptée est $S = (0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2)$. Sur ses quatre intervalles ouverts, f vaut successivement $0, 1, 2, 3$.

2) Calcul de l'intégrale

Chaque intervalle est de longueur $1/2$, d'où

$$\boxed{\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}(0 + 1 + 2 + 3) = 3.}$$

3) Linéarité et valeur absolue

$$\int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t = 3 - \tfrac{3}{2} \times 2 = \boxed{0}.$$

Sur les quatre intervalles, $|g|$ vaut respectivement $3/2, 1/2, 1/2, 3/2$. Donc

$$\boxed{\int_0^2 |g(t)|\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right) = 2.}$$

Exercice 4 — Indépendance de la subdivision

On reprend la fonction f de l'exercice 2.

1) Calculer son intégrale en utilisant $S' = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3)$.

2) Expliquer pourquoi l'ajout de points de subdivision n'altère jamais l'intégrale d'un escalier.

3) Montrer que, pour tous escaliers u, v sur $[a, b]$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\lambda u + \mu v) = \lambda \int_a^b u + \mu \int_a^b v.$$

1) Calcul après raffinement

Sur S', les valeurs successives de f sont $2, 2, -1, -1$. Ainsi

$$\int_0^3 f = 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = \boxed{0}.$$

2) Conservation de l'aire

Si une marche constante de hauteur c sur $]u, v[$ est découpée en $]u, w[$ et $]w, v[$, alors $c(w-u)+c(v-w) = c(v-u)$. L'égalité se répète pour un nombre fini de points ajoutés.

3) Linéarité

Choisissons une subdivision commune sur laquelle u et v prennent les valeurs u_i et v_i sur les intervalles de longueur Δt_i. On obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda u + \mu v) &= \sum_i (\lambda u_i + \mu v_i)\Delta t_i \\ &= \lambda \sum_i u_i \Delta t_i + \mu \sum_i v_i \Delta t_i.\end{aligned}$$

C'est l'égalité demandée.

Exercice 5 — Sommes de Darboux pour $f(t) = t$

Sur $[0, 1]$, on considère $f(t) = t$ et la subdivision régulière $S_n = (\frac{k}{n})_{0 \le k \le n}$.

1) Déterminer m_k et M_k sur $[k/n, (k+1)/n]$.

2) Calculer les sommes inférieure σ_n et supérieure Σ_n.

3) Calculer leur écart et leur limite commune.

4) Étudier la somme de Riemann en prenant les milieux des sous-intervalles.

1) Extremums

La fonction est croissante : $m_k = k/n$ et $M_k = (k+1)/n$.

2) Deux sommes explicites

$$\sigma_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \boxed{\frac{n-1}{2n}}, \qquad \Sigma_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n+1}{2n}}.$$

3) Écart et limites

$$\Sigma_n - \sigma_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \Sigma_n = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

4) Points milieux

Les milieux sont $\xi_k = (2k+1)/(2n)$; par conséquent

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2n} = \frac{1}{2n^2}(n(n-1)+n) = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

Chaque somme des milieux donne déjà l'aire exacte.

Exercice 6 — Darboux pour une fonction quadratique

Sur $[0,1]$, soit $f(t) = t^2$ et $S_n = (k/n)_{0\le k\le n}$.

1) Exprimer σ_n et Σ_n à l'aide des sommes de carrés.

2) Calculer $\Sigma_n - \sigma_n$ sans développer les sommes.

3) Déterminer leur limite commune.

1) Sommes de Darboux

Comme f est croissante,

$$\sigma_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \boxed{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}},$$

$$\Sigma_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}.$$

2) Écart télescopique

$$\Sigma_n - \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}(f(1) - f(0)) = \boxed{\frac{1}{n}}.$$

3) Valeur limite

Les deux expressions tendent vers $\boxed{1/3}$; elles encadrent toute somme de Riemann calculée sur S_n.

Exercice 7 — Fonction indicatrice et valeurs aux bornes

On définit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $h(t) = 0$ si $0 \le t < \frac{1}{2}$ et $h(t) = 1$ si $\frac{1}{2} \le t \le 1$. Soit n un entier pair.

1) Calculer $\sigma(h, S_n)$ et $\Sigma(h, S_n)$ sur la subdivision régulière.

2) Expliquer pourquoi les valeurs de h aux points de subdivision doivent être prises en compte dans les sommes de Darboux.

3) Déterminer la limite commune de ces sommes.

1) Un intervalle exceptionnel

Il y a $n/2$ intervalles entièrement situés dans $[1/2, 1]$, sur lesquels l'infimum et le supremum valent 1. Sur l'intervalle $[1/2 - 1/n, 1/2]$, l'infimum vaut 0, mais le supremum vaut 1 puisque $h(1/2) = 1$. Tous

les autres intervalles ont $m_k = M_k = 0$. Ainsi

$$\boxed{\sigma(h, S_n) = \frac{1}{2}, \qquad \Sigma(h, S_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.}$$

2) Extrémités et Darboux

Dans les sommes de Darboux, on considère les infimums et supremums sur les intervalles *fermés*. Une valeur isolée peut donc influencer une somme pour une subdivision fixée, même si elle ne change pas l'intégrale.

3) Passage à la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(h, S_n) = \lim_{n\to\infty} \Sigma(h, S_n) = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

Exercice 8 — Sommes de Riemann et choix des points marqués

Soit $d : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $d(t) = 1$ si $t \in \mathbb{Q}$ et $d(t) = 0$ sinon.

1) Pour toute subdivision S, calculer $\sigma(d, S)$ et $\Sigma(d, S)$.

2) Sur la subdivision régulière, construire une somme de Riemann égale à 0 et une autre égale à 1.

3) Peut-on déterminer une aire unique en faisant tendre le pas vers 0 ?

1) Densité des rationnels et irrationnels

Tout intervalle non réduit à un point contient des rationnels et des irrationnels. Ainsi, sur chaque sous-intervalle, l'infimum vaut 0 et le supremum vaut 1. Donc

$$\boxed{\sigma(d, S) = 0, \qquad \Sigma(d, S) = 1}$$

pour toute subdivision S de $[0, 1]$.

2) Deux choix de marques

En choisissant un rationnel dans chaque sous-intervalle, la somme de Riemann vaut $\sum_k 1 \cdot \Delta t_k = 1$. En choisissant un irrationnel dans chacun, elle vaut 0.

3) Conclusion

Même lorsque $\delta(S) \to 0$, les sommes peuvent valoir 0 ou 1. La fonction d n'est donc pas Riemann-intégrable. Cet exemple annonce le critère du chapitre 2.