Corrigé de la Série 2 : Intégrale de Riemann

Critère d'intégrabilité, fonctions continues, sommes et propriétés

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 — Critère de Darboux

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour une subdivision S, on note $\sigma(f,S)$ et $\Sigma(f,S)$ les sommes de Darboux.

1) Rappeler le critère de Riemann-intégrabilité à l'aide de $\Sigma(f,S) - \sigma(f,S)$.

2) Montrer que $\sigma(f,S) \leq R(f,S,\xi) \leq \Sigma(f,S)$ pour toute famille de points marqués ξ.

3) Expliquer l'effet d'un raffinement $S \subseteq S'$ sur ces deux sommes.

1) Critère fondamental

La fonction bornée f est Riemann-intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists S \quad \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) < \varepsilon.$$

L'intégrale inférieure est le supremum des sommes inférieures, et l'intégrale supérieure l'infimum des sommes supérieures ; elles coïncident exactement dans ce cas.

2) Encadrement des sommes pointées

Sur $I_k = [t_k, t_{k+1}]$, on a $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$. En multipliant par $\Delta t_k > 0$ et en sommant, on trouve

$$\boxed{\sigma(f,S) \leq R(f,S,\xi) \leq \Sigma(f,S).}$$

3) Raffinement

En subdivisant un intervalle, ses contributions à la somme inférieure ne diminuent pas et celles à la somme supérieure n'augmentent pas. Donc

$$\boxed{\sigma(f,S) \leq \sigma(f,S') \leq \Sigma(f,S') \leq \Sigma(f,S).}$$

Exercice 2 — Fonction en escalier et intégrabilité

On définit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \frac{1}{3}, \\ 2 & \frac{1}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

1) Calculer son intégrale en utilisant la définition pour les fonctions en escalier.

2) Démontrer son intégrabilité au moyen du critère de Darboux.

3) Si l'on remplace uniquement $f(1/3)$ par 100, l'intégrale change-t-elle ?

1) Aire de l'escalier

Avec $S = (0, 1/3, 1)$, l'intégrale vaut

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \cdot \tfrac{1}{3} + 2 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}.}$$

2) Critère de Darboux

Choisissons un petit intervalle $[1/3-\delta, 1/3+\delta] \subset [0,1]$ et une subdivision contenant ses deux extrémités et $1/3$. En dehors de ce voisinage, f est constante sur chaque intervalle ; la différence des sommes inférieure et supérieure est au plus $2(2\delta) = 4\delta$. En choisissant $\delta < \varepsilon/4$, le critère est vérifié.

3) Modification ponctuelle

Si la valeur en $1/3$ devient 100, seule l'oscillation des intervalles adjacents est modifiée ; on les enferme dans un voisinage de longueur arbitrairement petite. La fonction reste intégrable et son intégrale reste $\boxed{4/3}$. Une valeur en un point ne contribue pas à l'aire.

Exercice 3 — Continuité uniforme et intégrabilité

Sur $[0,2]$, on pose $f(t) = t^2$.

1) Montrer que $|f(x) - f(y)| \le 4|x-y|$ pour tous $x, y \in [0,2]$.

2) En déduire que f est uniformément continue sur $[0,2]$.

3) Pour une subdivision S de pas $\delta(S)$, établir

$$0 \le \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \le 8\delta(S).$$

4) Conclure à l'intégrabilité de f.

1) Inégalité de Lipschitz

$$|x^2 - y^2| = |x-y|\,|x+y| \le 4|x-y|,$$

car $0 \le x + y \le 4$.

2) Continuité uniforme

Pour un $\varepsilon > 0$, choisir $\delta = \varepsilon/4$; la même valeur de δ convient quels que soient $x, y \in [0,2]$.

3) Écart entre les sommes

Sur un intervalle I_k de longueur Δt_k, l'oscillation est au plus $4\Delta t_k \le 4\delta(S)$. Par conséquent

$$\Sigma(f,S) - \sigma(f,S) = \sum_k (M_k - m_k)\Delta t_k \le 4\delta(S) \sum_k \Delta t_k = \boxed{8\delta(S)}.$$

4) Intégrabilité

Pour $\varepsilon > 0$, une subdivision régulière de pas $< \varepsilon/8$ fournit un écart $< \varepsilon$. Le critère de Darboux conclut.

Exercice 4 — Sommes de Riemann et calcul de limite

1) Justifier que $t \mapsto t^2$ est intégrable sur $[0,1]$.

2) Écrire l'intégrale $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$ comme limite de sommes de Riemann à droite.

3) Calculer cette limite en utilisant $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) Justifier, sans nécessairement calculer sa valeur, l'existence de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2}.$$

1) Intégrabilité

La fonction $f(t) = t^2$ est continue sur le segment $[0,1]$; elle est donc Riemann-intégrable.

2) Sommes pointées à droite

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

3) Limite

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{3}}.$$

4) Une autre limite

La fonction $g(t) = 1/(1+t^2)$ est continue sur $[0,1]$; la formule des sommes de Riemann assure que la limite existe et vaut $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. Sa valeur $\pi/4$ pourra être obtenue au chapitre 3 par une primitive.

Exercice 5 — Intégrabilité et continuité : trois situations

Sur $[0,1]$, on définit, pour $t > 0$,

$$f(t) = t\sin(1/t), \qquad g(t) = \sin(1/t),$$

avec $f(0) = g(0) = 0$. On note également $d = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

1) Étudier la continuité de f en 0.

2) Les fonctions f et g sont-elles Riemann-intégrables ?

3) La fonction g est-elle réglée ? Et la fonction d est-elle intégrable ?

1) Prolongement continu

Puisque $|t\sin(1/t)| \le t \to 0$, on a $f(t) \to f(0) = 0$. La fonction f est donc continue en 0 et sur tout $[0,1]$.

2) Intégrabilité

f est intégrable par continuité. La fonction g est bornée et continue sur $]0,1]$; son seul point de discontinuité éventuel est 0. Une fonction bornée ayant un nombre fini de points de discontinuité est Riemann-intégrable. Donc g l'est aussi.

3) Fonction réglée et fonction de Dirichlet

g n'a pas de limite à droite en 0 : pour $t_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$, $g(t_n) = 1$, tandis que pour $s_n = 1/(3\pi/2 + 2\pi n)$, $g(s_n) = -1$. Une fonction réglée admet des limites unilatérales ; g n'est donc pas réglée. Pour d, les infimums et supremums sur tout intervalle non dégénéré valent 0 et 1. L'écart des sommes de Darboux reste 1 : d n'est pas intégrable.

Exercice 6 — Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables, avec $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

1) Établir $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

2) Démontrer l'inégalité $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

3) En supposant $|f(t)| \leq M$, montrer que $\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$.

4) Déduire de ces résultats que, si $m \leq f \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

1) Croissance

La fonction $g - f$ est intégrable et positive. Les sommes inférieures donnent une intégrale positive ou nulle. Par linéarité,

$$0 \leq \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f.$$

2) Valeur absolue

Les deux inégalités $-|f| \leq f \leq |f|$ impliquent

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

d'où le résultat.

3) Majoration uniforme

Si $|f| \leq M$, alors $\int_a^b |f| \leq \int_a^b M = M(b-a)$.

4) Encadrement par les bornes

En intégrant les inégalités $m \leq f(t) \leq M$, on obtient

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a).}$$

Exercice 7 — Approximation uniforme par des escaliers

Pour $n \geq 1$, on définit sur $[0,1]$ la fonction en escalier f_n par

$$f_n(t) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{si } t \in [k/n, (k+1)/n[, \qquad f_n(1) = 1.$$

Soit $f(t) = t^2$.

1) Montrer que $\|f - f_n\|_\infty \leq 2/n$.

2) En déduire $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 f_n\right| \leq 2/n$.

3) Calculer $\int_0^1 f_n$ et en déduire $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$.

1) Approximation uniforme

Pour $k/n \leq t < (k+1)/n$,

$$0 \leq t^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 < \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2} = \frac{2k+1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n}.$$

En $t = 1$, la différence est nulle. Ainsi $\boxed{\|f - f_n\|_\infty \leq 2/n}$.

2) Erreur sur l'intégrale

L'inégalité fondamentale $\left|\int_a^b h\right| \leq (b-a)\|h\|_\infty$ appliquée à $h = f - f_n$ donne

$$\boxed{\left|\int_0^1 f - \int_0^1 f_n\right| \leq \frac{2}{n}.}$$

3) Intégrales d'escaliers

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \to \frac{1}{3}.$$

Le majorant de l'erreur tend vers 0, donc $\boxed{\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = 1/3}$.

Exercice 8 — Valeur moyenne et aire géométrique

On considère $f(t) = 2t - 1$ sur $[0,1]$.

1) Justifier que f est intégrable et déterminer ses signes.

2) Calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer l'aire géométrique entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

4) Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$.

1) Continuité et signe

f est continue et s'annule en $t = 1/2$. Elle est négative sur $[0, 1/2[$ et positive sur $]1/2, 1]$.

2) Aire algébrique

Par symétrie du graphe autour de $(1/2, 0)$ (ou par le calcul élémentaire),

$$\boxed{\int_0^1 (2t-1)\,\mathrm{d}t = 0}.$$

3) Aire géométrique

Les deux régions sont deux triangles de base $1/2$ et de hauteur 1 : chacune a une aire $1/4$. Donc

$$\boxed{\int_0^1 |2t-1|\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}}.$$

4) Valeur moyenne

Par définition, la valeur moyenne est $\frac{1}{1-0}\int_0^1 f = \boxed{0}$. Elle est aussi la valeur $f(1/2)$, conformément à la formule de la moyenne pour les fonctions continues.