Corrigé de la Série 3 : Intégrale et primitive

Théorème fondamental et méthodes de calcul d'intégrales

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 — Primitives et théorème fondamental

Soit $f(t) = 1 + t^2$ sur $[0, 2]$ et, pour $x \in [0, 2]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier que F est bien définie et déterminer $F'(x)$ pour $0 < x < 2$.

2) Calculer explicitement $F(x)$.

3) Déterminer toutes les primitives de f sur $]0, 2[$.

4) Justifier que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

1) Théorème fondamental

La fonction f est continue sur $[0, 2]$, donc intégrable. Le théorème fondamental affirme que F est dérivable sur $]0, 2[$ et que

$$\boxed{F'(x) = f(x) = 1 + x^2}.$$

2) Expression de F

Une primitive usuelle est $U(t) = t + t^3/3$. Par Newton–Leibniz,

$$\boxed{F(x) = U(x) - U(0) = x + \frac{x^3}{3}.}$$

3) Toutes les primitives

$$\boxed{U_C(x) = x + \frac{x^3}{3} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

4) Unicité à constante près

Si U et V sont deux primitives sur un intervalle, alors $(U - V)' = f - f = 0$. Par le théorème des accroissements finis, $U - V$ est constante sur cet intervalle.

Exercice 2 — Calculs directs avec Newton–Leibniz

Justifier l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (3t^2 + 2t + 1)\,\mathrm{d}t.$

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

3) $I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t}.$

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t.$

Intégrabilité

Toutes les intégrandes sont continues sur leurs segments respectifs ; les quatre intégrales existent.

1) Polynôme

$U_1(t) = t^3 + t^2 + t$, donc $\boxed{I_1 = [U_1]_0^1 = 3}$.

2) Fraction rationnelle usuelle

$U_2(t) = \arctan t$, donc $\boxed{I_2 = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4}$.

3) Logarithme

$U_3(t) = \ln t$ pour $t > 0$, donc $\boxed{I_3 = \ln e - \ln 1 = 1}$.

4) Fonction trigonométrique

$U_4(t) = \sin t$, d'où $\boxed{I_4 = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1}$.

Exercice 3 — Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes, en précisant les choix de fonctions dérivées et primitives :

1) $I = \displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t.$

2) $J = \displaystyle\int_0^1 t^2 e^t\,\mathrm{d}t.$

3) $K = \displaystyle\int_1^e \ln t\,\mathrm{d}t.$

1) Une intégration par parties

Avec $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$, on a $u' = 1$, $v = e^t$:

$$I = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e - (e-1) = \boxed{1}.$$

2) Deux intégrations par parties

Avec $u = t^2$ et $v' = e^t$,

$$J = [t^2e^t]_0^1 - 2\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = e - 2I = \boxed{e-2}.$$

Une primitive de t^2e^t est $e^t(t^2 - 2t + 2)$.

3) Logarithme

En écrivant $\ln t = (\ln t)\cdot 1$, avec $u = \ln t$, $v' = 1$, on obtient

$$K = [t\ln t]_1^e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}t = e - (e-1) = \boxed{1}.$$

Toutes les IPP sont réalisées sur des segments où les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 4 — Changements de variable

Calculer :

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$

2) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

3) $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\cos^3 t\,\mathrm{d}t.$

1) Substitution $u = 1+t^2$

Comme $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$, les bornes deviennent 1 et 2 :

$$I = \tfrac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = [\sqrt{u}]_1^2 = \boxed{\sqrt{2}-1}.$$

2) Même substitution

$$J = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln u]_1^2 = \boxed{\ln 2}.$$

3) Substitution $u = \cos t$

On a $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$; les bornes deviennent 1 et 0 :

$$K = -\int_1^0 u^3\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u = \boxed{\tfrac{1}{4}}.$$

Les substitutions sont licites puisque les fonctions concernées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur les segments considérés.

Exercice 5 — Symétrie, périodicité et simplifications

1) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

2) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

3) Déterminer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$

4) Si f est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, montrer que $\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de a.

1) Fonction impaire

$t \mapsto t^3/(1+t^2)$ est impaire et continue. Sur un intervalle symétrique,

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0}.$$

2) Fonction paire

$t \mapsto 1/(1+t^2)$ est paire, donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \boxed{\pi/2}.$$

3) Identité trigonométrique

$\sin^2 t = (1-\cos 2t)/2$, d'où

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{t}{2} - \tfrac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \boxed{\pi}.$$

4) Intégrale sur une période

En posant $H(a) = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$, la dérivation des bornes donne $H'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$. Ainsi H est constante.

Exercice 6 — Décomposition en éléments simples

1) Chercher deux réels A, B tels que

$$\frac{2t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}.$$

2) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t+3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Identification

$2t+3 = A(t+2) + B(t+1)$ impose $A+B=2$ et $2A+B=3$. Donc $\boxed{A = B = 1}$.

2) Calcul de I

La fraction est continue sur $[0,1]$. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= [\ln(t+1) + \ln(t+2)]_0^1 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \boxed{\ln 3}. \end{aligned}$$

3) Reconnaissance d'une dérivée composée

Comme $(1+t^2)' = 2t$,

$$J = \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}.$$

Exercice 7 — Intégrales à bornes variables

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

1) Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

3) Déterminer $F(0)$ et $G(0)$; étudier la parité de F.

1) Dérivabilité

Les intégrandes sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $H(y) = \int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable avec $H'(y) = e^{-y^2}$, et $F(x) = H(x^2)$. De même, $G(x) = \arctan(2x) - \arctan x$.

2) Dérivées

Par la règle de chaîne et la formule de Leibniz pour les bornes variables,

$$\boxed{F'(x) = 2xe^{-x^4}}, \qquad \boxed{G'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2}}.$$

3) Valeurs et symétrie

$F(0) = G(0) = 0$. Puisque $(-x)^2 = x^2$, on a $F(-x) = F(x)$: F est paire.

Exercice 8 — Aires entre deux courbes et point singulier

1) Calculer l'aire géométrique comprise entre $y = t$ et $y = t^2$ pour $t \in [0, 1]$.

2) Calculer l'aire comprise entre $y = |t|$ et $y = t^2$ pour $t \in [-1, 1]$.

3) Sur $[0, 1]$, soit $h(t) = t$ pour $t \neq 1/2$ et $h(1/2) = 10$. Calculer $H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier si $H' = h$ partout.

1) Première aire

Sur $[0, 1]$, $t \geq t^2$, donc

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^1 (t - t^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

2) Deuxième aire

Sur $[-1, 1]$, on a $|t| \geq t^2$ et la différence est paire. Ainsi

$$\mathcal{A}_2 = 2\int_0^1 (t - t^2)\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

3) Limite du théorème fondamental

Modifier une fonction intégrable en un seul point ne change pas son intégrale :

$$H(x) = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{x^2}{2}}, \qquad H'(x) = x.$$

En particulier, $H'(1/2) = 1/2 \neq 10 = h(1/2)$. La continuité de l'intégrande au point considéré est essentielle pour conclure que la dérivée de sa fonction intégrale y coïncide avec elle.