# Corrigé de la Série 4 : Intégrales généralisées

Convergence, comparaisons, absolue convergence et calculs

Énoncés et corrigés détaillés

## Exercice 1 — Intégrales de référence : puissances de Riemann

Soit $p \in \mathbb{R}$.

**1)** Étudier, suivant $p$, la convergence de $I_p = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$ et donner sa valeur lorsqu'elle existe.

**2)** Étudier, suivant $p$, la convergence de $J_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$ et donner sa valeur lorsqu'elle existe.

**3)** Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t$ diverge pour tout $p \in \mathbb{R}$.

### 1) Borne infinie

Pour $p \neq 1$ et $A > 1$,

$$\int_1^A t^{-p}\,\mathrm{d}t = \frac{A^{1-p} - 1}{1-p}.$$

Cette quantité admet une limite finie si et seulement si $1 - p < 0$, soit $p > 1$. Dans ce cas

$$\boxed{I_p = \frac{1}{p-1} \quad (p > 1).}$$

Pour $p = 1$, l'intégrale tronquée vaut $\ln A \to +\infty$ : elle diverge.

### 2) Singularité à l'origine

Pour $p \neq 1$ et $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_\varepsilon^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \varepsilon^{1-p}}{1-p}.$$

La limite est finie exactement si $p < 1$, et alors

$$\boxed{J_p = \frac{1}{1-p} \quad (p < 1).}$$

Pour $p = 1$, on obtient $-\ln \varepsilon \to +\infty$.

### 3) Deux bornes à vérifier séparément

La convergence près de 0 exige $p < 1$, alors que celle à l'infini exige $p > 1$. Ces conditions sont incompatibles : l'intégrale sur $]0, +\infty[$ diverge pour tout $p$.

## Exercice 2 — Étude d'une famille à deux extrémités

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, soit

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (1+t)^\beta}.$$

**1)** Donner un équivalent de l'intégrande au voisinage de 0.

**2)** Donner un équivalent de l'intégrande lorsque $t \to +\infty$.

**3)** Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes de convergence.

**4)** Calculer $I(0,2)$.

### 1) Au voisinage de 0

Comme $(1+t)^\beta \to 1$ lorsque $t \to 0^+$,

$$\frac{1}{t^\alpha (1+t)^\beta} \sim_{t\to 0^+} t^{-\alpha}.$$

Pour cet intégrande positif, le critère des équivalents et l'exercice 1 donnent la condition $\alpha < 1$.

### 2) Au voisinage de $+\infty$

Comme $(1+t)^\beta \sim t^\beta$ pour toute valeur réelle de $\beta$,

$$\frac{1}{t^\alpha (1+t)^\beta} \sim_{t\to+\infty} t^{-(\alpha+\beta)}.$$

La convergence à l'infini exige $\alpha + \beta > 1$.

### 3) Convergence globale

En découpant l'intégrale en 1, on obtient

$$\boxed{I(\alpha,\beta) \text{ converge} \iff \alpha < 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta > 1.}$$

### 4) Exemple

$$I(0,2) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \lim_{A\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+A}\right) = \boxed{1}.$$

## Exercice 3 — Intégrales logarithmiques : cas de Bertrand

Soit $p \in \mathbb{R}$.

**1)** Étudier $I_p = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^p}$.

**2)** Étudier $J_p = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t|\ln t|^p}$.

**3)** Calculer les valeurs de $I_p$ et $J_p$ lorsque ces intégrales convergent.

### 1) Changement de variable à l'infini

Sur $[e, A]$, on pose $u = \ln t$, d'où $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t/t$. Ainsi

$$\int_e^A \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^p} = \int_1^{\ln A} \frac{\mathrm{d}u}{u^p}.$$

Lorsque $A \to +\infty$, on retrouve une intégrale de Riemann de puissance : elle converge si et seulement si $p > 1$.

### 2) Substitution près de 0

Sur $[\varepsilon, 1/2]$, posons $u = -\ln t$. Les bornes sont $-\ln\varepsilon$ et $\ln 2$ et $\mathrm{d}t/t = -\mathrm{d}u$. Alors

$$\int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t|\ln t|^p} = \int_{\ln 2}^{-\ln\varepsilon} u^{-p}\,\mathrm{d}u.$$

Elle converge également si et seulement si $p > 1$.

### 3) Valeurs exactes

Pour $p > 1$,

$$\boxed{I_p = \frac{1}{p-1}}, \qquad \boxed{J_p = \frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}}.$$

Pour $p \leq 1$, les deux intégrales divergent vers $+\infty$.

## Exercice 4 — Singularités finies et séparation des bornes

Étudier la convergence des trois intégrales suivantes et calculer celles qui convergent :

**1)** $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

**2)** $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

**3)** $K = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}.$

### 1) Une singularité intégrable en 0

Pour $0 < t \leq 1$, l'intégrande est négatif. Posons $t = u^2$ dans l'intégrale tronquée :

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 4\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} \ln u\,\mathrm{d}u = 4[u\ln u - u]_{\sqrt{\varepsilon}}^{1}.$$

Comme $u\ln u \to 0$ en $0^+$, on obtient

$$\boxed{I = -4}.$$

En outre, $|\ln t|/\sqrt{t} = o(t^{-3/4})$ quand $t \to 0^+$ ; l'intégrale converge absolument.

### 2) Une singularité à l'infini

Pour $A > 1$, une intégration par parties donne

$$\int_1^A \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t + 1}{t}\right]_1^A = 1 - \frac{\ln A + 1}{A}.$$

Le dernier terme tend vers 0, donc $\boxed{J = 1}$. L'intégrande est positive : la convergence est absolue.

### 3) Singularité intérieure

Il faut étudier séparément $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ et $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Les primitives logarithmiques divergent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ au voisinage de 1. Par conséquent $\boxed{K \text{ diverge}}$. Une éventuelle valeur principale n'est pas la valeur d'une intégrale impropre convergente.

## Exercice 5 — Convergence simple et convergence absolue

Considérons l'intégrale oscillante

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**1)** En intégrant par parties sur $[A, B]$ avec $1 \leq A < B$, montrer que

$$\left|\int_A^B \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{A}.$$

**2)** En déduire la convergence de $I$.

**3)** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

**4)** Classer $I$ : convergence absolue ou semi-convergence ?

### 1) Majoration du reste

Par intégration par parties sur $[A, B]$,

$$\int_A^B \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_A^B - \int_A^B \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\left|\int_A^B \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \int_A^B \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \boxed{\frac{2}{A}}.$$

### 2) Critère de Cauchy

Le majorant $2/A$ tend vers 0 lorsque $A \to +\infty$, uniformément en $B > A$. Le critère de Cauchy assure la convergence de $I$.

### 3) Divergence de la valeur absolue

Pour tout entier $k \geq 1$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

La somme de ces minorants diverge comme la série harmonique. Donc l'intégrale absolue diverge.

### 4) Conclusion

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est semi-convergente.}}$$

## Exercice 6 — Une intégration par parties récurrente

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

**1)** Justifier la convergence de $I_n$.

**2)** Calculer $I_0$.

**3)** Montrer que $I_n = nI_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

**4)** En déduire une formule explicite de $I_n$.

### 1) Convergence

Sur $[0,1]$, l'intégrande est continue. Pour $t \to +\infty$, $t^{n+2}e^{-t} \to 0$ ; il existe donc $C > 0$ tel que $t^n e^{-t} \leq Ct^{-2}$ pour $t$ assez grand. La comparaison garantit la convergence.

### 2) Initialisation

$$I_0 = \lim_{A\to+\infty} [-e^{-t}]_0^A = \boxed{1}.$$

### 3) Récurrence

Pour $n \geq 1$, une IPP sur $[0, A]$ avec $u = t^n$ et $v' = e^{-t}$ donne

$$\int_0^A t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-t^n e^{-t}]_0^A + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $A^n e^{-A} \to 0$, le passage à la limite fournit

$$\boxed{I_n = nI_{n-1}}.$$

### 4) Expression générale

Par récurrence, $I_n = n(n-1)\cdots 1\, I_0 = \boxed{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $0! = 1$).

## Exercice 7 — Deux singularités intégrables sur un segment

On considère

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

**1)** Étudier le comportement de l'intégrande près de 0 et près de 1.

**2)** Montrer que l'intégrale converge.

**3)** À l'aide de $t = \sin^2 u$, calculer $I$.

### 1) Comportement aux bornes

On a

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \sim_{t\to 0^+} t^{-1/2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \sim_{t\to 1^-} (1-t)^{-1/2}.$$

### 2) Convergence

Dans les deux cas, l'exposant $1/2$ est inférieur à 1. Les deux intégrales impropres obtenues en coupant en $1/2$ convergent donc.

### 3) Substitution

Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, posons $t = \sin^2 u$ sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Alors

$$\mathrm{d}t = 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u, \qquad \sqrt{t(1-t)} = \sin u\cos u,$$

puisque $0 < u < \pi/2$. Après passage aux limites aux deux bornes,

$$\boxed{I = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u = \pi}.$$

## Exercice 8 — Contrôle d'erreur et troncature

**1)** Pour $p > 1$ et $A \geq 1$, calculer exactement le reste

$$R_p(A) = \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}.$$

**2)** Quel $A$ garantit une erreur strictement inférieure à $10^{-3}$ pour $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ ?

**3)** Utiliser l'exercice 5 pour majorer le reste $R_{\sin}(A) = \displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

**4)** Donner une condition suffisante sur $A$ pour avoir $|R_{\sin}(A)| < 10^{-3}$.

### 1) Reste d'une intégrale positive

Pour $p > 1$,

$$\boxed{R_p(A) = \lim_{B\to\infty} \frac{B^{1-p} - A^{1-p}}{1-p} = \frac{A^{1-p}}{p-1}}.$$

### 2) Précision $10^{-3}$

Pour $p = 2$, $R_2(A) = 1/A$. Il suffit donc de choisir $\boxed{A > 1000}$ (par exemple $A = 1001$).

### 3) Reste oscillant

D'après l'intégration par parties de l'exercice 5, en laissant $B \to \infty$,

$$\boxed{|R_{\sin}(A)| \leq \frac{2}{A}}.$$

### 4) Condition suffisante

Pour garantir $|R_{\sin}(A)| < 10^{-3}$ à partir de cette majoration, il suffit que $2/A < 10^{-3}$, soit $\boxed{A > 2000}$. Il s'agit d'un majorant garanti, non nécessairement de la troncature minimale.