UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2026/2027
Filière $\mathcal{MI}$ $\mathcal{S}_2$
Module : Analyse II

Série 1 : Intégrales des fonctions en escalier

Subdivisions, intégrale, propriétés, sommes de Darboux et de Riemann

Énoncés des exercices

Exercice 1 — Subdivisions et raffinement

Soit $S = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ une subdivision de $[0, 1]$.

1) Calculer le pas $\delta(S)$.

2) Montrer que $S' = (0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ est plus fine que S et déterminer son pas.

3) Donner la subdivision commune la moins fine de S' et $T = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

Exercice 2 — Intégrale d'un escalier et aire algébrique

Sur $[0, 3]$, on considère l'escalier f qui vaut 2 sur $]0, 1[$ et -1 sur $]1, 3[$ (valeurs arbitraires en 0, 1 et 3).

1) Donner une subdivision adaptée à f.

2) Calculer $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^3 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier la relation de Chasles.

Exercice 3 — Escalier défini à l'aide de la partie entière

Soit $f(t) = \lfloor 2t \rfloor$ pour $t \in [0, 2]$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière.

1) Donner une subdivision adaptée et les valeurs de f sur ses intervalles ouverts.

2) Calculer $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) On pose $g(t) = f(t) - \frac{3}{2}$. Calculer $\int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^2 |g(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 — Indépendance de la subdivision

On reprend la fonction f de l'exercice 2.

1) Calculer son intégrale en utilisant $S' = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3)$.

2) Expliquer pourquoi l'ajout de points de subdivision n'altère jamais l'intégrale d'un escalier.

3) Montrer que, pour tous escaliers u, v sur $[a, b]$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\lambda u + \mu v) = \lambda \int_a^b u + \mu \int_a^b v.$$

Exercice 5 — Sommes de Darboux pour $f(t) = t$

Sur $[0,1]$, on considère $f(t) = t$ et la subdivision régulière $S_n = (\frac{k}{n})_{0\leq k\leq n}$.

1) Déterminer m_k et M_k sur $[k/n, (k+1)/n]$.

2) Calculer les sommes inférieure σ_n et supérieure Σ_n.

3) Calculer leur écart et leur limite commune.

4) Étudier la somme de Riemann en prenant les milieux des sous-intervalles.

Exercice 6 — Darboux pour une fonction quadratique

Sur $[0,1]$, soit $f(t) = t^2$ et $S_n = (k/n)_{0\leq k\leq n}$.

1) Exprimer σ_n et Σ_n à l'aide des sommes de carrés.

2) Calculer $\Sigma_n - \sigma_n$ sans développer les sommes.

3) Déterminer leur limite commune.

Exercice 7 — Fonction indicatrice et valeurs aux bornes

On définit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $h(t) = 0$ si $0 \leq t < \frac{1}{2}$ et $h(t) = 1$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Soit n un entier pair.

1) Calculer $\sigma(h, S_n)$ et $\Sigma(h, S_n)$ sur la subdivision régulière.

2) Expliquer pourquoi les valeurs de h aux points de subdivision doivent être prises en compte dans les sommes de Darboux.

3) Déterminer la limite commune de ces sommes.

Exercice 8 — Sommes de Riemann et choix des points marqués

Soit $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $d(t) = 1$ si $t \in \mathbb{Q}$ et $d(t) = 0$ sinon.

1) Pour toute subdivision S, calculer $\sigma(d, S)$ et $\Sigma(d, S)$.

2) Sur la subdivision régulière, construire une somme de Riemann égale à 0 et une autre égale à 1.

3) Peut-on déterminer une aire unique en faisant tendre le pas vers 0 ?