Série 2 : Intégrale de Riemann

Critère d'intégrabilité, fonctions continues, sommes et propriétés

Énoncés des exercices

Exercice 1 — Critère de Darboux

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour une subdivision S, on note $\sigma(f,S)$ et $\Sigma(f,S)$ les sommes de Darboux.

1) Rappeler le critère de Riemann-intégrabilité à l'aide de $\Sigma(f,S) - \sigma(f,S)$.

2) Montrer que $\sigma(f,S) \leq R(f,S,\xi) \leq \Sigma(f,S)$ pour toute famille de points marqués ξ.

3) Expliquer l'effet d'un raffinement $S \subseteq S'$ sur ces deux sommes.

Exercice 2 — Fonction en escalier et intégrabilité

On définit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{3}, \\ 2 & \frac{1}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

1) Calculer son intégrale en utilisant la définition pour les fonctions en escalier.

2) Démontrer son intégrabilité au moyen du critère de Darboux.

3) Si l'on remplace uniquement $f(1/3)$ par 100, l'intégrale change-t-elle ?

Exercice 3 — Continuité uniforme et intégrabilité

Sur $[0,2]$, on pose $f(t) = t^2$.

1) Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq 4|x-y|$ pour tous $x, y \in [0,2]$.

2) En déduire que f est uniformément continue sur $[0,2]$.

3) Pour une subdivision S de pas $\delta(S)$, établir

$$0 \leq \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leq 8\delta(S).$$

4) Conclure à l'intégrabilité de f.

Exercice 4 — Sommes de Riemann et calcul de limite

1) Justifier que $t \mapsto t^2$ est intégrable sur $[0,1]$.

2) Écrire l'intégrale $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$ comme limite de sommes de Riemann à droite.

3) Calculer cette limite en utilisant $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) Justifier, sans nécessairement calculer sa valeur, l'existence de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2}.$$

Exercice 5 — Intégrabilité et continuité : trois situations

Sur $[0,1]$, on définit, pour $t > 0$,

$$f(t) = t\sin(1/t), \qquad g(t) = \sin(1/t),$$

avec $f(0) = g(0) = 0$. On note également $d = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

1) Étudier la continuité de f en 0.

2) Les fonctions f et g sont-elles Riemann-intégrables ?

3) La fonction g est-elle réglée ? Et la fonction d est-elle intégrable ?

Exercice 6 — Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables, avec $f(t) \le g(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

1) Établir $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

2) Démontrer l'inégalité $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

3) En supposant $|f(t)| \le M$, montrer que $\left|\int_a^b f\right| \le M(b-a)$.

4) Déduire de ces résultats que, si $m \le f \le M$, alors

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a).$$

Exercice 7 — Approximation uniforme par des escaliers

Pour $n \ge 1$, on définit sur $[0,1]$ la fonction en escalier f_n par

$$f_n(t) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{si } t \in [k/n, (k+1)/n[, \qquad f_n(1) = 1.$$

Soit $f(t) = t^2$.

1) Montrer que $\|f - f_n\|_\infty \le 2/n$.

2) En déduire $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 f_n\right| \le 2/n$.

3) Calculer $\int_0^1 f_n$ et en déduire $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 — Valeur moyenne et aire géométrique

On considère $f(t) = 2t - 1$ sur $[0, 1]$.

1) Justifier que f est intégrable et déterminer ses signes.

2) Calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer l'aire géométrique entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

4) Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0, 1]$.