Série 3 : Intégrale et primitive

Théorème fondamental et méthodes de calcul d'intégrales

Énoncés des exercices

Exercice 1 — Primitives et théorème fondamental

Soit $f(t) = 1 + t^2$ sur $[0, 2]$ et, pour $x \in [0, 2]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier que F est bien définie et déterminer $F'(x)$ pour $0 < x < 2$.

2) Calculer explicitement $F(x)$.

3) Déterminer toutes les primitives de f sur $]0, 2[$.

4) Justifier que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Exercice 2 — Calculs directs avec Newton–Leibniz

Justifier l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (3t^2 + 2t + 1)\,\mathrm{d}t.$

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}.$

3) $I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t}.$

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t.$

Exercice 3 — Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes, en précisant les choix de fonctions dérivées et primitives :

1) $I = \displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t.$

2) $J = \displaystyle\int_0^1 t^2 e^t\,\mathrm{d}t.$

3) $K = \displaystyle\int_1^e \ln t\,\mathrm{d}t.$

Exercice 4 — Changements de variable

Calculer :

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

2) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

3) $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 — Symétrie, périodicité et simplifications

1) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

3) Déterminer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

4) Si f est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, montrer que $\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de a.

Exercice 6 — Décomposition en éléments simples

1) Chercher deux réels A, B tels que

$$\frac{2t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}.$$

2) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t+3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 — Intégrales à bornes variables

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

1) Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

3) Déterminer $F(0)$ et $G(0)$; étudier la parité de F.

Exercice 8 — Aires entre deux courbes et point singulier

1) Calculer l'aire géométrique comprise entre $y = t$ et $y = t^2$ pour $t \in [0,1]$.

2) Calculer l'aire comprise entre $y = |t|$ et $y = t^2$ pour $t \in [-1,1]$.

3) Sur $[0,1]$, soit $h(t) = t$ pour $t \neq 1/2$ et $h(1/2) = 10$. Calculer $H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier si $H' = h$ partout.