Série 4 : Intégrales généralisées

Convergence, comparaisons, absolue convergence et calculs

Énoncés des exercices

Exercice 1 — Intégrales de référence : puissances de Riemann

Soit $p \in \mathbb{R}$.

1) Étudier, suivant p, la convergence de $I_p = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$ et donner sa valeur lorsqu'elle existe.

2) Étudier, suivant p, la convergence de $J_p = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$ et donner sa valeur lorsqu'elle existe.

3) Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t$ diverge pour tout $p \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 — Étude d'une famille à deux extrémités

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, soit

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(1+t)^{\beta}}.$$

1) Donner un équivalent de l'intégrande au voisinage de 0.

2) Donner un équivalent de l'intégrande lorsque $t \to +\infty$.

3) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes de convergence.

4) Calculer $I(0,2)$.

Exercice 3 — Intégrales logarithmiques : cas de Bertrand

Soit $p \in \mathbb{R}$.

1) Étudier $I_p = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^p}$.

2) Étudier $J_p = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t|\ln t|^p}$.

3) Calculer les valeurs de I_p et J_p lorsque ces intégrales convergent.

Exercice 4 — Singularités finies et séparation des bornes

Étudier la convergence des trois intégrales suivantes et calculer celles qui convergent :

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

2) $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

3) $K = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}.$

Exercice 5 — Convergence simple et convergence absolue

Considérons l'intégrale oscillante

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1) En intégrant par parties sur $[A, B]$ avec $1 \leq A < B$, montrer que

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{2}{A}.$$

2) En déduire la convergence de I.

3) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

4) Classer I : convergence absolue ou semi-convergence ?

Exercice 6 — Une intégration par parties récurrente

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier la convergence de I_n.

2) Calculer I_0.

3) Montrer que $I_n = nI_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

4) En déduire une formule explicite de I_n.

Exercice 7 — Deux singularités intégrables sur un segment

On considère

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

1) Étudier le comportement de l'intégrande près de 0 et près de 1.

2) Montrer que l'intégrale converge.

3) À l'aide de $t = \sin^2 u$, calculer I.

Exercice 8 — Contrôle d'erreur et troncature

1) Pour $p > 1$ et $A \geq 1$, calculer exactement le reste

$$R_p(A) = \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}.$$

2) Quel A garantit une erreur strictement inférieure à 10^{-3} pour $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$?

3) Utiliser l'exercice 5 pour majorer le reste $R_{\sin}(A) = \displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

4) Donner une condition suffisante sur A pour avoir $|R_{\sin}(A)| < 10^{-3}$.