UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

# Analyse I

CHAPITRE 1

## Nombres Réels

Propriétés du corps des réels, valeur absolue, bornes et densité

SUPPORT DE COURS

**Prof. Mohamed Najib LAATABI**

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

*Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.*

Année universitaire • **2026–2027**

# Sommaire du chapitre

**Notations et abréviations** **ii**

**1 Nombres Réels** **1**
1.1 Propriétés élémentaires du corps des réels . . . . . 1
1.2 Valeur Absolue . . . . . 2
1.3 Bornes supérieure et inférieure . . . . . 3
1.4 Propriété d'Aarchimède . . . . . 4
1.5 La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ . . . . . 5

**2 Suites numériques** **6**

**3 Limites et fonctions continues** **6**

**4 Fonctions dérivables** **6**

# Notations et abréviations

| Notation | Signification |
|---|---|
| **Ensembles et logique** | |
| $\mathbb{N},\ \mathbb{N}^*$ | Entiers naturels avec 0 ; entiers naturels strictement positifs. |
| $\mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$ | Entiers relatifs ; nombres rationnels ; nombres réels. |
| $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ | Ensemble des nombres irrationnels. |
| $x \in E,\ x \notin E$ | $x$ appartient à $E$ ; $x$ n'appartient pas à $E$. |
| $A \subset B,\ A \subseteq B$ | $A$ est inclus dans $B$ : tout élément de $A$ appartient à $B$. |
| $E \setminus F$ | Ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $F$. |
| $\forall,\ \exists,\ \exists!$ | Pour tout ; il existe ; il existe un unique. |
| $\Rightarrow,\ \Leftrightarrow$ | Implique ; équivaut à (si et seulement si). |
| **Ordre, bornes et partie entière** | |
| $\lvert x \rvert$ | Valeur absolue du réel $x$ : $\lvert x \rvert = \max(x, -x)$. |
| $\lvert x - y \rvert$ | Distance entre les réels $x$ et $y$. |
| $\varepsilon > 0,\ \epsilon > 0$ | Deux écritures de la lettre epsilon ; réel positif servant à exprimer une précision. |
| $m,\ M$ | Minorant et majorant d'une partie $E$ : $m \leq x \leq M$ pour tout $x \in E$. |
| $\inf E$ | Borne inférieure de $E$ : son plus grand minorant, lorsqu'il existe dans $\mathbb{R}$. |
| $\sup E$ | Borne supérieure de $E$ : son plus petit majorant, lorsqu'il existe dans $\mathbb{R}$. |
| $\min E,\ \max E$ | Plus petit et plus grand éléments de $E$, lorsqu'ils existent ; ils appartiennent à $E$. |
| $+\infty,\ -\infty$ | Symboles d'infini, distincts des réels ; utilisés aussi pour les bornes des parties non bornées. |
| $E(x),\ \lfloor x \rfloor$ | Partie entière de $x$ : l'unique entier $m$ tel que $m \leq x < m + 1$. |
| $x_\varepsilon$ | Élément choisi en fonction de $\varepsilon$, notamment dans la caractérisation des bornes. |
| **Abréviations usuelles** | |
| ssi | Si et seulement si. |
| resp. | Respectivement. |
| c.-à-d. | C'est-à-dire. |

Chapitre

# 1 Nombres Réels

## 1.1 Propriétés élémentaires du corps des réels

Pour répondre aux besoins de comptage et de mesure, nous disposons depuis longtemps des trois ensembles fondamentaux suivants :

— **L'ensemble des entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

— **L'ensemble des entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

— **L'ensemble des rationnels** : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$.

Il est évident que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ces ensembles couvrent la plupart des besoins pour effectuer des calculs.

Cependant, les mathématiciens savent, depuis l'époque de Pythagore, qu'il existe des quantités qui ne peuvent être exprimées à l'aide de ces ensembles. Un exemple classique est la longueur $x$ de la diagonale d'un carré de côté 1.

En effet, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$1^2 + 1^2 = x^2,$$

mais, comme le montre la proposition suivante, $x \notin \mathbb{Q}$.

**Proposition 1.1.1**

Si $x$ est solution de l'équation $x^2 = 2$, alors $x \notin \mathbb{Q}$.

*Démonstration.* Nous allons démontrer ce résultat en utilisant la méthode du **raisonnement par l'absurde**.

Supposons que $x = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux (c'est-à-dire que leur seul diviseur commun est 1).

Si $x^2 = 2$, alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \implies p^2 = 2q^2.$$

Ainsi, $p^2$ est pair, ce qui implique que $p$ est également pair (car le carré d'un entier impair est impair). On peut donc écrire $p = 2k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

En substituant $p = 2k$ dans l'équation $p^2 = 2q^2$, nous obtenons :

$$(2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies 2k^2 = q^2.$$

Ainsi, $q^2$ est pair, ce qui implique que $q$ est également pair.

Cependant, cela contredit l'hypothèse selon laquelle $p$ et $q$ sont premiers entre eux (si $p$ et $q$ sont tous deux pairs, ils ont au moins 2 comme diviseur commun).

Par conséquent, notre supposition que $x \in \mathbb{Q}$ est fausse.
**Conclusion :** $x \notin \mathbb{Q}$.

■

La construction de l'ensemble des nombres réels a été un sujet d'étude approfondi pendant plusieurs décennies. Elle s'appuie exclusivement sur quelques axiomes fondamentaux qui prolongent de manière naturelle les propriétés de $\mathbb{Q}$. Bien que cette construction soit très enrichissante sur le plan conceptuel, elle ne sera pas abordée dans le cadre de ce cours. Nous nous limiterons à admettre l'existence de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, lequel satisfait les axiomes suivants :

**Stabilité :** $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y \in \mathbb{K}$ et $x \times y \in \mathbb{K}$
**Commutativité :** $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y = y + x$ et $x \times y = y \times x$
**Associativité :** $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, (x + y) + z = x + (y + z)$ et $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
**Distributivité :** $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
**Éléments neutres :** $\exists 0, 1 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, x + 0 = x$ et $x \times 1 = x$
**Opposés/Inverses :** $\forall x \in \mathbb{K}, \exists (-x) \in \mathbb{K}, (-x) + x = 0$ et $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \times x^{-1} = 1$,
**Propriété de la borne supérieure :** Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

La relation d'ordre total permet de définir la fonction valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

## 1.2 Valeur Absolue

On définit sur $\mathbb{R}$ l'application "valeur absolue" par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 1**
D'après la définition de l'application valeur absolue, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = |-x| = \max(x, -x).$$

Les résultats suivants sont très importants pour la manipulation de l'application valeur absolue d'un produit, une somme ou une différence de réels.

**Proposition 1.2.1**
L'application valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. $x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x|^2 = |x^2| = x^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$
7. $|x| = 0 \iff (|x| \leq \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0)$
8. $x \leq y \iff (x \leq y + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0)$

*Démonstration.* Il est évident que si $|x| = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$.

Supposons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$, mais $|x| \neq 0$. En prenant $\varepsilon' = \frac{|x|}{2}$, on obtient une contradiction :

Puisque $|x| < \varepsilon' = \frac{|x|}{2}$, cela implique que $|x| < \frac{|x|}{2}$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, notre supposition est fausse, et donc $|x| = 0$.

■

## 1.3 Bornes supérieure et inférieure

**Définition 1.3.1**

Soit $E$ un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ et soient $m$ et $M$ deux réels.
On dit que $E$ est une partie minorée par $m$ (ou que $m$ est un minorant de $E$) si $m \leq x$, $\forall x \in E$. Le plus grand minorant de $E$, noté $\inf E$, est appelé *borne inférieure* de $E$.
On dit que $E$ est une partie majorée par $M$ (ou que $M$ est un majorant de $E$) si $x \leq M$, $\forall x \in E$. Le plus petit majorant de $E$, noté $\sup E$, est appelé *borne supérieure* de $E$.
On dit que $E$ est une partie bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

**Proposition 1.3.1**

Soit $E$ une partie non-vide et minorée dans $\mathbb{R}$, alors

$$a = \inf E \iff (\forall x \in E,\ a \leq x) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in E : a \leq x_\varepsilon < a + \varepsilon)$$

*Démonstration.* $\Rightarrow$ Supposons que $a = \inf E$. Soit $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant pour $E$ (d'après la définition de $a$). Donc il existe $x_\varepsilon \in E$ qui vérifie $a \leq x_\varepsilon < a + \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Soient $E$ une partie non-vide et minorée dans $\mathbb{R}$ et $a$ un réel tels que

$$\forall x \in E,\ a \leq x \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in E : a \leq x_\varepsilon < a + \varepsilon.$$

Il est clair que $a$ est un minorant de $E$. Supposons qu'il existe un minorant de $E$, noté $a'$, qui soit strictement plus grand que $a$. Pour $\varepsilon = \frac{a'-a}{2} > 0$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $x_\varepsilon < a + \varepsilon = \frac{a'+a}{2} < a'$. Ceci est impossible car $a'$ est un minorant de $E$.

■

**Proposition 1.3.2**

Soit $E$ une partie non-vide et majorée dans $\mathbb{R}$, alors

$$b = \sup E \iff (\forall x \in E,\ x \leq b) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in E : b - \varepsilon < x_\varepsilon \leq b)$$

**Proposition 1.3.3**

Lorsque la borne inférieure (ou supérieure) existe, elle est unique.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe $E$, une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée, qui admet deux bornes inférieures $b$ et $b' \in \mathbb{R}$ avec $b \leq b'$. Supposons que $b < b'$ et soit $\varepsilon = b' - b$. D'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $x \in E$ tel que

$$b' = b + \varepsilon < x \leq b.$$

Ceci contredit le fait que $b'$ est une borne inférieure de $E$. ■

**Les deux propriétés suivantes caractérisent l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.**

Propriété de la borne inférieure :
Toute partie $E$ non-vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Propriété de la borne supérieure :
Toute partie $E$ non-vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Si $E$ est une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et non majorée (respectivement non minorée) on pose $\sup E = +\infty$ (respectivement $\inf E = -\infty$).

**Remarque 2**

Les deux propriétés ci-dessus sont équivalentes

## 1.4 Propriété d'Aarchimède

Archimède fut le premier à constater qu'un voyageur partant à pied d'un point $A$ peut atteindre un point $C$, après un nombre fini de pas. Ce constat, appelé Propriété d'Archimède, peut être formulé comme suit :

**Théorème 1.4.1 – (Propriété d'Archimède)**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ny \leq x.$$

Définissons $A = \{ny : n \in \mathbb{N}\}$. Alors $A$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide car $0 \in A$, et majorée par $x$.
D'après le principe de la borne supérieure, $A$ admet une borne supérieure $s = \sup(A)$ dans $\mathbb{R}$.
Par définition de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ny \leq s,$$

et

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } s - \epsilon < n_0 y \leq s.$$

Prenons $\epsilon = y$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$s - y < n_0 y \leq s.$$

En ajoutant $y$ des deux côtés de l'inégalité $s - y < n_0 y$, on obtient :

$$s < (n_0 + 1)y.$$

Puisque $(n_0 + 1)y \in A$ (car $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$), cela contredit le fait que $s$ est la borne supérieure de $A$.
Ainsi, l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N},\ ny \leq x$ est fausse.

**Conclusion :** Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

■

**Théorème 1.4.2**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m \leq x < m+1.$$

De plus, $m$ est appelé la partie entière de $x$ (et on note $m$ par $E(x)$).

*Démonstration.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble

$$B = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

**1. $B$ est non vide :**
Supposons par l'absurde que $B$ est vide. Cela signifierait que $x < n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Prenons $x = 1$. Cela impliquerait que $1 < n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui est absurde. Donc $B$ est non vide.

**2. $B$ est majoré :**
Clairement, $B \subseteq \mathbb{Z}$ et tout $n \in B$ satisfait $n \leq x$. Par conséquent, $B$ est majoré par $x$.

**3. Existence d'un maximum :**
Puisque $B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, $B$ admet un maximum $m_0 = \max(B)$. Par définition de $B$, on a $m_0 \leq x$, et comme $m_0$ est le maximum, $m_0 + 1 > x$.

**4. Unicité de $m_0$ :**
Supposons qu'il existe un autre entier $m_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $m_1 \leq x < m_1 + 1$. Par définition de $B$, $m_1 \in B$, mais comme $m_1 \neq m_0$, cela impliquerait $m_1 > m_0$, ce qui contredit le fait que $m_0 = \max(B)$. Ainsi, $m_0$ est unique.

**Conclusion :** Il existe un unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq x < m + 1$, et $m$ est la partie entière de $x$.

■

## 1.5 La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

**Théorème 1.5.1**

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Puisque $\mathbb{R}$ Archimède, montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On a alors :

$$0 < y - x.$$

D'après l'axiome d'Archimède, il existe un entier naturel $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < 1 < m(y - x).$$

Cela implique :

$$1 + mx < my.$$

En posant $n = E(mx)$ (la partie entière de $mx$), on a $n \in \mathbb{Z}$ et :

$$n \leq mx < n + 1.$$

En divisant par $m$, on obtient :

$$\frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m}.$$

Posons $p = n + 1$. On a alors :

$$x < \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \frac{p}{m} \in \mathbb{Q}.$$

De plus, puisque $p < mx + 1$, on en déduit que :

$$\frac{p}{m} < y.$$

Ainsi, $\frac{p}{m} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < \frac{p}{m} < y$.

**Conclusion :**

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe un $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$. Par conséquent, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■