UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Analyse I

CHAPITRE 4

Fonctions dérivables

Dérivabilité, théorèmes fondamentaux, applications et convexité

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Sommaire du chapitre

Notations et abréviations **ii**

1 Nombers reels **1**

2 Suites numériques **1**

2 Limites et fonctions continues **1**

4 Fonctions dérivables **1**
4.1 Définition de la Dérivabilité . . . 1
4.1.1 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 3
4.2 Dérivabilité de la composée et de la réciproque . . . 4
4.2.1 Dérivée de la fonction composée . . . 4
4.2.2 Dérivée de la fonction réciproque . . . 4
4.3 Dérivabilité à gauche et à droite . . . 5
4.4 Dérivées successives . . . 7
4.5 Extremum local et Théorème de Rolle . . . 7
4.5.1 Extremum local . . . 7
4.5.2 Théorème de Rolle . . . 8
4.6 Théorème des accroissements finis et applications . . . 9
4.6.1 Théorème des Accroissements Finis (TAF) . . . 9
4.6.2 Sens de variation et dérivée . . . 11
4.6.3 Inégalité des Accroissements Finis (IAF) . . . 11
4.7 Applications avancées et Convexité . . . 12
4.7.1 Règle de L'Hôpital . . . 12
4.7.2 Convexité et dérivée seconde . . . 12

Notations et abréviations

Notation	Signification
Dérivées et approximation locale	
$f : I \to \mathbb{R},\ x_0 \in I$	Fonction réelle sur l'intervalle I ; point étudié x_0.
$h = x - x_0$	Accroissement de la variable autour de x_0.
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Taux d'accroissement entre x_0 et x, pour $x \neq x_0$.
$f'(x_0)$	Nombre dérivé en x_0, limite finie du taux d'accroissement lorsqu'elle existe.
f'	Fonction dérivée de f.
$f'_g(x_0),\ f'_d(x_0)$	Nombres dérivés à gauche et à droite en x_0.
$x \to x_0^-,\ x \to x_0^+$	Approche de x_0 par la gauche ; par la droite.
$\mathcal{C}_f,\ T$	Courbe représentative de f ; tangente à cette courbe.
$\varepsilon(x)$	Fonction de reste tendant vers 0 quand $x \to x_0$ dans l'approximation affine du cours.
Ordres supérieurs et opérations	
$f'',\ f^{(n)}$	Dérivée seconde ; dérivée d'ordre n. $f^{(n)}$ ne désigne pas la puissance f^n.
$C^0(I),\ \mathcal{C}^0(I)$	Ensemble des fonctions continues sur I.
$C^n(I)$	Fonctions n fois dérivables sur I dont la dérivée d'ordre n est continue.
$C^\infty(I)$	Fonctions dérivables à tout ordre sur I.
$g \circ f$	Fonction composée : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
f^{-1}	Fonction réciproque d'une bijection ; distincte de la fonction $1/f$.
$n!,\ \binom{n}{k}$	Factorielle ; coefficient binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, pour $0 \leq k \leq n$.
$\sum_{k=0}^{n}$	Somme portant sur tous les entiers k de 0 à n, notamment dans la formule de Leibniz.
Extremums, convexité et abréviations	
$m,\ M$	Minimum et maximum d'une fonction sur un intervalle, lorsqu'ils sont atteints.
$\lambda \in [0, 1]$	Coefficient d'une combinaison convexe : $(1 - \lambda)x + \lambda y$.
TAF	Théorème des accroissements finis.
IAF	Inégalité des accroissements finis.
ssi ; resp.	Si et seulement si ; respectivement.

Chapitre

4 Fonctions dérivables

4.1 Définition de la Dérivabilité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

Définition 4.1.1 – Dérivabilité en un point

On dit que f est **dérivable en** x_0 si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une limite finie quand x tend vers x_0.
Cette limite est notée $f'(x_0)$ et s'appelle la **dérivée de** f **en** x_0. On a alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On dit que f est **dérivable sur** I si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0. Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$ s'appelle **l'application dérivée** de f.

Définition 4.1.2 – Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

À la limite, on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une **équation de la tangente** au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dire que f est dérivable en x_0, c'est dire que la courbe de f peut être approchée localement par une droite (voir Figure 4.1).

L'équation de la tangente est donnée par la partie affine du développement :

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

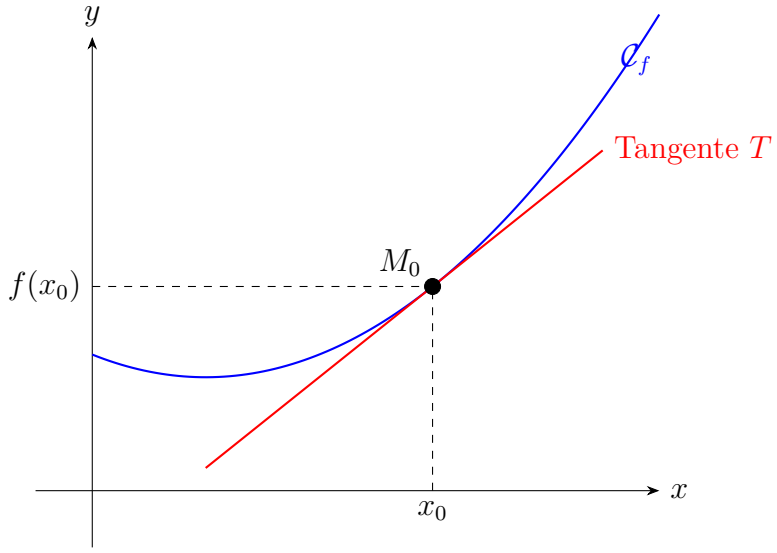


FIGURE 4.1 – La tangente (en rouge) réalise la meilleure approximation affine locale de la courbe $\mathcal{C}_f$ au point x_0.

Exemple 1 – La fonction carrée

Considérons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Cherchons la dérivée en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \quad \text{(Développement)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) \quad \text{(Simplification par } h\text{)} \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

Définition 4.1.3 – Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ (qui est alors égal à $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ avec :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Proposition 4.1.1

Si f est dérivable en un point $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Supposons que f est dérivable en x_0. D'après la Proposition 4.1.3 , nous pouvons écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Étudions la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0, on a : $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)f'(x_0) = 0 \times f'(x_0) = 0$ et $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\varepsilon(x) = 0 \times 0 = 0$. Par somme de ces limites, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Par définition, la fonction f est donc continue en x_0. ■

4.1.1 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 4.1.1

Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I et dérivables en x_0. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante.
Alors, les fonctions $f + g$, λf et fg sont dérivables en x_0 et on a les formules suivantes :

Somme : $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Produit par un scalaire : $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

Produit : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

De plus, si $g(x_0) \neq 0$, la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Exemple 2

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = \frac{e^x}{x}$$

Ici, nous avons $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$. Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $g(x) \neq 0$.

$f'(x) = e^x$

$g'(x) = 1$

Appliquons la formule du quotient :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

4.2 Dérivabilité de la composée et de la réciproque

4.2.1 Dérivée de la fonction composée

Théorème 4.2.1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : f(I) \to \mathbb{R}$ deux fonction, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Démonstration. Puisque f est dérivable en x_0, on a : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon_f(x))$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_f(x) = 0$.

De même, puisque g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, on a : $g(y) = g(y_0) + (y - y_0)(g'(y_0) + \varepsilon_g(y))$ avec $\lim\limits_{y \to y_0} \varepsilon_g(y) = 0$.

En posant $y = f(x)$ et en substituant le développement de f dans celui de g, on obtient :

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))\,[g'(f(x_0)) + \varepsilon_g(f(x))]$$

En remplaçant $(f(x) - f(x_0))$ par sa forme développée, il vient :

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (x - x_0) \underbrace{(f'(x_0) + \varepsilon_f(x))\,[g'(f(x_0)) + \varepsilon_g(f(x))]}_{A(x)}$$

Quand $x \to x_0$, on a $f(x) \to f(x_0)$, donc $\varepsilon_g(f(x)) \to 0$ et $\varepsilon_f(x) \to 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$. D'après la **Définition et Proposition 4.1.3**, cela prouve que $g \circ f$ est dérivable et donne la formule de la dérivée. ■

4.2.2 Dérivée de la fonction réciproque

Théorème 4.2.2 – Théorème de la bijection et sa dérivée

Soit $f : I \to f(I)$ une bijection continue. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Démonstration. Posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. Puisque f est une bijection continue, $y \to y_0$ équivaut à $x \to x_0$. Considérons le taux d'accroissement de f^{-1} en y_0 :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Comme f est dérivable en x_0, le dénominateur tend vers $f'(x_0)$ quand $x \to x_0$. Puisque $f'(x_0) \neq 0$, la limite du quotient existe et vaut $\frac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi, f^{-1} est dérivable en y_0. ■

Remarque 1

En utilisant la règle de la composée sur l'identité $f(f^{-1}(y)) = y$, on retrouve la formule :

$$(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1 \implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple 3 – Calcul de la dérivée de $\sqrt{x}$

La fonction $f(x) = x^2$ est continue et strictement croissante sur $I =]0, +\infty[$. Elle réalise une bijection vers $J =]0, +\infty[$. Sa réciproque est $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
On sait que $f'(x) = 2x$. Comme $x > 0$, $f'(x) \neq 0$. Appliquons la formule pour trouver la dérivée de $\sqrt{y}$ en un point y_0 :

$$(\sqrt{y})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{avec } x_0 = \sqrt{y_0}$$

$$(\sqrt{y})'(y_0) = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

On retrouve bien la formule connue : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Proposition 4.2.1 – Équation de la tangente de f^{-1}

Soit f une bijection dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction réciproque f^{-1} au point $y_0 = f(x_0)$ s'écrit :

$$x = \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + f^{-1}(y_0)$$

Démonstration. On a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

En applique donc la définition de équation de la tangente et on obtien alors

$$x = \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + f^{-1}(y_0)$$

■

4.3 Dérivabilité à gauche et à droite

Lorsque la limite du taux d'accroissement n'est pas la même selon qu'on s'approche de x_0 par valeurs inférieures ou supérieures, on définit les dérivées latérales.

Définition 4.3.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

* **Dérivabilité à droite :** f est dérivable à droite en x_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$$

On appelle $f'_d(x_0)$ le **nombre dérivé à droite**.

* **Dérivabilité à gauche :** f est dérivable à gauche en x_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$$

On appelle $f'_g(x_0)$ le **nombre dérivé à gauche**.

Théorème 4.3.1 – Condition de dérivabilité

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si :

i) Elle est dérivable à droite et à gauche en x_0.

ii) Les nombres dérivés sont égaux : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Si f est dérivable à gauche et à droite mais que $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors la fonction n'est pas dérivable en x_0.

La courbe admet deux demi-tangentes distinctes au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

On dit que le point M_0 est un **point anguleux**.

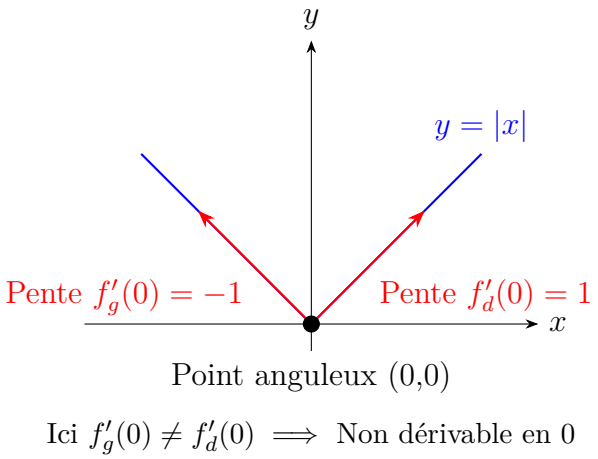


FIGURE 4.2 – Illustration d'un point anguleux avec la fonction valeur absolue. Les pentes à gauche et à droite ne s'alignent pas.

Exemple 4

La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0.

— À droite ($x > 0$), $f(x) = x$, donc $f'_d(0) = 1$.

— À gauche ($x < 0$), $f(x) = -x$, donc $f'_g(0) = -1$.

Comme $1 \neq -1$, f n'est pas dérivable en 0.

4.4 Dérivées successives

Définition 4.4.1 – Dérivées successives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On définit les dérivées successives par récurrence. La dérivée d'ordre 0 de f, notée $f^{(0)}$, est la fonction f elle-même. Pour tout entier naturel n, si la dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$, est définie et dérivable sur I, on appelle dérivée d'ordre $n+1$ la dérivée de $f^{(n)}$. On la note $f^{(n+1)}$.
Une fonction est dite de classe C^n sur I si elle est n fois dérivable et que sa dérivée d'ordre n est continue sur I. Si elle est dérivable à tout ordre, on dit qu'elle est de classe C^∞.

Théorème 4.4.1 – Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions de classe C^n sur un intervalle I. La fonction produit $f \cdot g$ est également de classe C^n sur I, et sa dérivée d'ordre n est donnée par la formule suivante :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ représente les coefficients binomiaux (combinaisons).

Démonstration. La démonstration s'effectue par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 1$, on retrouve la formule classique de la dérivée d'un produit : $(fg)' = f'g + fg'$. En supposant la propriété vraie au rang n, on dérive l'expression de la somme. L'utilisation de la relation de Pascal sur les coefficients binomiaux, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, permet de regrouper les termes et d'obtenir la formule au rang $n+1$. ■

4.5 Extremum local et Théorème de Rolle

4.5.1 Extremum local

Définition 4.5.1 – Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et c un point intérieur à I.

i) f admet un **maximum local** en c si : $\exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]c-\delta, c+\delta[, f(x) \leq f(c)$

ii) f admet un **minimum local** en c si : $\exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]c-\delta, c+\delta[, f(x) \geq f(c)$

Théorème 4.5.1 – Condition nécessaire d'extremum (Fermat)

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in]a, b[$.

$$\text{Si } x_0 \text{ est un extremum local de } f, \text{ alors } f'(x_0) = 0$$

Démonstration. Soit f dérivable sur un ouvert I et $x_0 \in I$ un point où f admet un maximum local. Alors il existe un voisinage $J \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$. Soit τ le Taux d'accroissement définie par :

$$\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

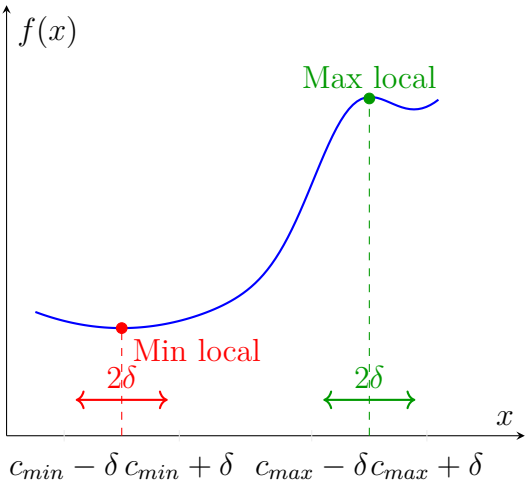


FIGURE 4.3 – Représentation graphique d'un maximum et d'un minimum local avec leurs voisinages d'étude associés.

pour h petit .

Le numérateur $f(x_0+h)-f(x_0)$ est toujours **négatif ou nul** par définition du maximum.

i) À droite ($h>0$) : Le quotient est négatif : $\tau(h)\leq 0$. En passant à la limite :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\tau(h)\leq 0$$

ii) À gauche ($h<0$) : Le dénominateur change de signe, donc le quotient est positif : $\tau(h)\geq 0$. En passant à la limite :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\tau(h)\geq 0$$

La fonction f étant dérivable en x_0, les limites à gauche et à droite sont égales :

$$0\leq f'(x_0)\leq 0 \implies \mathbf{f'(x_0)=0}$$

(Le raisonnement est analogue pour un minimum local en inversant le signe du numérateur.)

■

4.5.2 Théorème de Rolle

Théorème 4.5.2 – Théorème de Rolle

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ vérifiant les trois hypothèses suivantes :

i) $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$ (continuité sur le fermé)

ii) f est dérivable sur $]a,b[$

iii) $f(a)=f(b)$

Alors : $\exists c\in]a,b[,\ f'(c)=0$

Démonstration. D'après le théorème des bornes atteintes (Weierstrass), comme $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$, il existe $x_m,x_M\in[a,b]$ tels que :

$$f(x_m)=m=\min_{x\in[a,b]}f(x) \quad \text{et} \quad f(x_M)=M=\max_{x\in[a,b]}f(x)$$

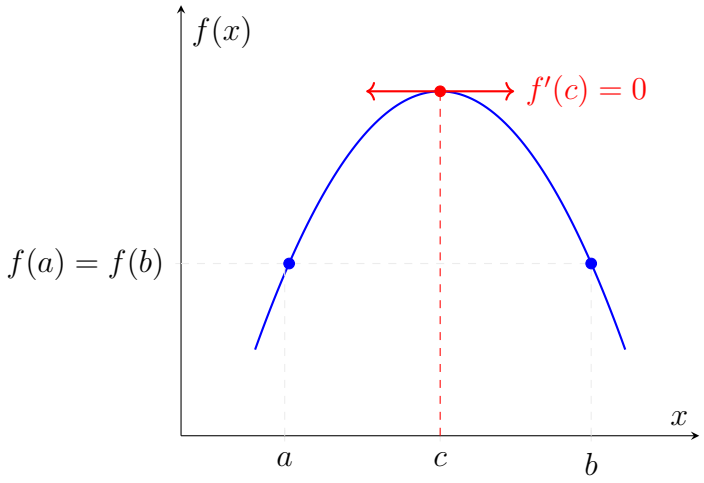


FIGURE 4.4 – Théorème de Rolle : la condition $f(a) = f(b)$ implique l'existence d'un point c tel que $f'(c) = 0$.

i) Si $M = m$. Alors $\forall x \in [a, b], f(x) = f(a)$, donc f est constante.
On a alors
$$\forall c \in]a, b[, f'(c) = 0.$$

ii) Si $M \neq m$. Puisque $f(a) = f(b)$, l'un au moins des deux extremums (M ou m) est atteint en un point c différent des extrémités a et b.
On a donc $c \in]a, b[$. Comme f est dérivable en c et admet un extremum local en ce point, d'après le théorème de Fermat 4.5.1 : $f'(c) = 0$.

■

Exemple 5 – Exemple d'application

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur $I = [1, 2]$.

f est une fonction polynomiale, donc $f \in \mathcal{C}^0([1, 2])$ et dérivable sur $]1, 2[$.

$f(1) = 1^2 - 3(1) + 2 = 0$ et $f(2) = 2^2 - 3(2) + 2 = 0$, donc $f(1) = f(2)$.

Par le théorème de Rolle : $\exists c \in]1, 2[, f'(c) = 0$.
On résout $f'(x) = 2x - 3 = 0$, ce qui donne $c = \frac{3}{2}$. On vérifie bien que $\frac{3}{2} \in]1, 2[$.

4.6 Théorème des accroissements finis et applications

4.6.1 Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Théorème 4.6.1 – Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

i) f est **continue** sur l'intervalle fermé $[a, b]$,

ii) f est **dérivable** sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Alors, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

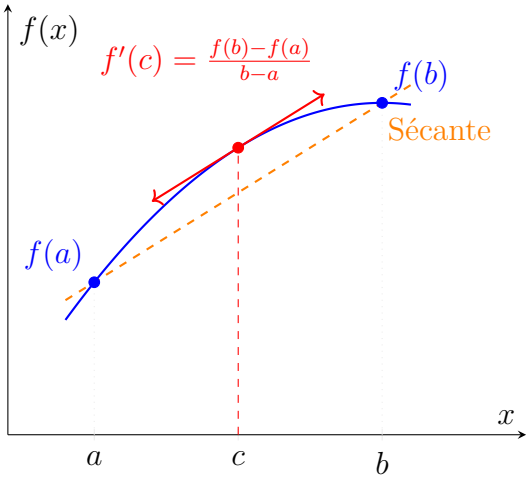


FIGURE 4.5 – Illustration du Théorème des Accroissements Finis : existence d'un point c où la tangente est parallèle à la sécante.

C'est-a-dire il existe au moins un point de la courbe d'abscisse c où la **tangente est parallèle à la sécante** reliant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Démonstration. On définit la fonction g sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$

Cette fonction g représente l'écart vertical entre la courbe de f et la corde (AB).

g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f l'est.

et :

i) $g(a) = f(a) - [f(a) + 0] = 0$.

ii) $g(b) = f(b) - [f(a) + (f(b) - f(a))] = f(b) - f(b) = 0$.

On a donc $g(a) = g(b) = 0$.
D'après le théorème de Rolle 4.5.2, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. En dérivant g, on obtient :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ainsi, $g'(c) = 0$ implique directement :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

4.6.2 Sens de variation et dérivée

Corollaire 4.6.1 – Sens de variation et dérivée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Les propriétés suivantes caractérisent le lien entre le signe de la dérivée et les variations de f :

i) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur $[a, b]$.

ii) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante sur $[a, b]$.

iii) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur $[a, b]$.

De plus, concernant la croissance stricte :

iv) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante sur $[a, b]$.

v) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0 \implies f$ est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Démonstration. (Cas de la croissance)
L'implication ($\Leftarrow$) découle de la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement (qui est positif si f est croissante).

L'implication ($\Rightarrow$) est une conséquence directe du **Théorème des Accroissements Finis**.

Soit $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$ tel que $x_1 < x_2$. D'après le TAF 4.6.1 appliqué à f sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

* Si $f'(c) \geq 0$, alors comme $x_2 - x_1 > 0$, on a $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, soit $f(x_1) \leq f(x_2)$.
* Si $f'(c) > 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$, soit $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui prouve la croissance stricte.

Le raisonnement est identique pour les autres cas. ■

4.6.3 Inégalité des Accroissements Finis (IAF)

Corollaire 4.6.2 – Inégalité des Accroissements Finis (IAF)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Démonstration. L'inégalité est immédiate si $a = b$. Supposons $a < b$. D'après le Théorème des Accroissements Finis 4.6.1, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

En passant à la valeur absolue :

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a|$$

Or, par hypothèse, nous savons que $|f'(x)| \leq M$ pour tout x de l'intervalle, donc en particulier pour c :

$$|f'(c)| \leq M$$

On en déduit l'inégalité souhaitée :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

■

4.7 Applications avancées et Convexité

4.7.1 Règle de L'Hôpital

Théorème 4.7.1 – Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I ouvert contenant c (ou ayant c pour extrémité), telles que $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq c$. Si :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty$$

Et si la limite $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors :

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple 6

Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. On a $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Les deux tendent vers 0. $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos(x)}{1}$. Comme $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, alors $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Remarque 2

Cette règle ne s'applique que pour les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Il faut toujours vérifier les hypothèses avant de dériver.

4.7.2 Convexité et dérivée seconde

Définition 4.7.1 – Fonctions convexes et concaves

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **convexe** sur I si pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Géométriquement, cela signifie que la courbe est située en dessous de ses cordes.

Proposition 4.7.1

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

1. f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
2. f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

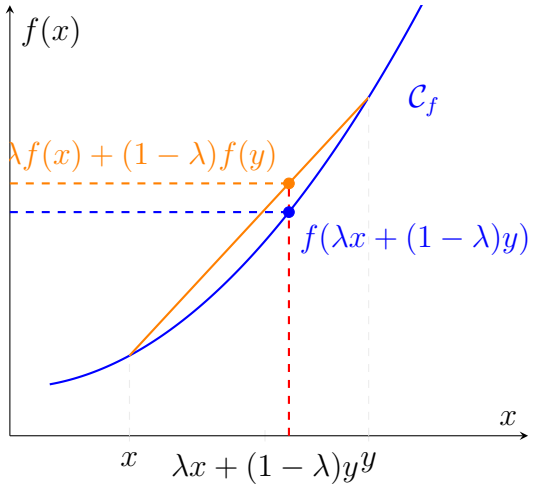


FIGURE 4.6 – Caractérisation d'une fonction convexe par ses cordes.

Définition 4.7.2 – Point d'inflexion

On appelle **point d'inflexion** un point où la courbe d'une fonction change de concavité (elle passe de convexe à concave, ou inversement).

Théorème 4.7.2

Si f est deux fois dérivable en c, et si $f''(c) = 0$ en changeant de signe en c, alors le point $(c, f(c))$ est un point d'inflexion.

Exemple 7

Soit $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. $f''(x)$ s'annule en 0 et change de signe (négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$). Le point $(0, 0)$ est donc un point d'inflexion pour la fonction cube.

Corollaire 4.7.1

En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

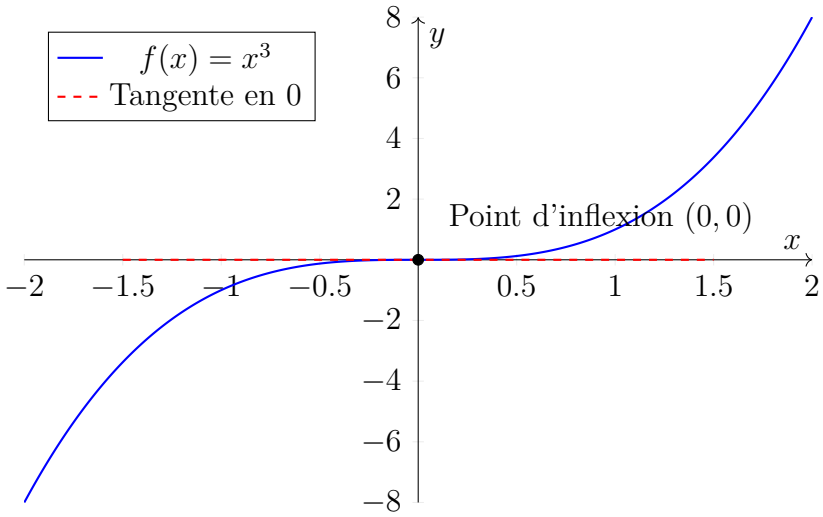


FIGURE 4.7 – Illustration du point d'inflexion de la fonction $f(x) = x^3$ et de sa tangente à l'origine.