UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Analyse III

CHAPITRE I

Comparaison locale des fonctions

Voisinages, notations de Landau, fonctions négligeables et équivalents

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Table des matières

Notations et abréviations **ii**

1 Comparaison locale des fonctions **1**
1.1 Voisinages et propriétés locales . . . 1
1.1.1 Voisinage d'un réel . . . 1
1.1.2 Voisinages relatifs et approches unilatérales . . . 2
1.1.3 Voisinages à l'infini et propriétés locales . . . 2
1.2 Rappels sur les limites et cadre des comparaisons . . . 3
1.2.1 Limites finies et infinies . . . 3
1.2.2 Conventions pour les notations de Landau . . . 4
1.3 Domination : la notation grand O . . . 4
1.3.1 Définition et critère du quotient . . . 4
1.3.2 Exemples et signification graphique . . . 5
1.3.3 Premières propriétés . . . 5
1.4 Fonctions négligeables : la notation petit o . . . 6
1.4.1 Définition et caractérisations . . . 6
1.4.2 Interprétation, exemples et pièges . . . 7
1.4.3 Opérations sur les petits o . . . 8
1.5 Fonctions équivalentes . . . 8
1.5.1 Définition et erreur relative . . . 8
1.5.2 Propriétés fondamentales . . . 9
1.5.3 Produits, quotients et puissances . . . 10
1.5.4 Sommes, différences et compositions . . . 10
1.6 Équivalents usuels et échelles de comparaison . . . 11
1.6.1 Équivalents fondamentaux en zéro . . . 11
1.6.2 Comparaison des puissances . . . 12
1.6.3 Croissances comparées . . . 13
1.7 Convexité et comparaison des fonctions . . . 14
1.7.1 Fonctions convexes et interprétation géométrique . . . 14
1.7.2 Inégalité de Jensen . . . 15
1.7.3 Inégalité des pentes . . . 16
1.7.4 Caractérisations par les dérivées . . . 17
1.7.5 Applications à la comparaison des fonctions . . . 19
1.7.6 Complément : l'épigraphe . . . 20

Notations et abréviations

Les comparaisons de ce chapitre portent sur des fonctions réelles. Le point de comparaison est toujours précisé : $x \to a$, $x \to a^+$, $x \to a^-$ ou $x \to \pm\infty$.

Notation	Signification
$\mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \overline{\mathbb{R}}$	Entiers naturels ; nombres réels ; $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$D,\ a,\ \ell$	Domaine d'étude ; point d'approche ; limite éventuelle.
$V_\delta(a)$	Voisinage ouvert symétrique $]a-\delta, a+\delta[$, avec $\delta > 0$.
$V_\delta^*(a)$	Voisinage précédent privé du point a.
$\mathcal{V}(a)$	Famille des voisinages de a.
$a^+,\ a^-$	Approche de a par la droite, par la gauche.
$\varepsilon, \delta,\ M,\ A$	Constantes utilisées dans les définitions ; leurs dépendances sont précisées.
$f(x) = O(g(x))$	f est dominée par g au point considéré.
$f(x) = o(g(x))$	f est négligeable devant g au point considéré.
$f(x) \sim g(x)$	f et g sont équivalentes au point considéré.
$O(1),\ o(1)$	Quantité localement bornée ; quantité qui tend vers 0.
$r(x),\ \eta(x)$	Reste ; fonction auxiliaire tendant vers 0 si cela est indiqué.
$h = x - a$	Variable de recentrage autour d'un point fini a.
ln, exp	Logarithme népérien ; fonction exponentielle, $\exp(x) = e^x$.
s.s.i.	Si et seulement si.
au v. de a	Au voisinage de a ; on privilégie l'expression complète dans le texte.

Attention – Une notation dépend du point étudié

$x^2 = o(x)$ lorsque $x \to 0$, tandis que $x = o(x^2)$ lorsque $x \to +\infty$. Une comparaison sans point d'approche peut donc être ambiguë.

Chapitre 1

Comparaison locale des fonctions

Deux fonctions peuvent tendre toutes deux vers 0 sans le faire à la même vitesse. Ainsi, près de 0, x^2 devient beaucoup plus petit que x en valeur absolue, puisque $|x^2/x| = |x| \to 0$. Les notations de Landau donnent un langage précis à cette observation.

1.1 Voisinages et propriétés locales

1.1.1 Voisinage d'un réel

Définition 1.1.1 – Voisinage

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un **voisinage de** a s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$]a - \delta, a + \delta[\subset V.$$

On note $V_\delta(a) =]a-\delta, a+\delta[$ et $V_\delta^*(a) = V_\delta(a) \setminus \{a\}$. Ce dernier ensemble est un **voisinage épointé**.

Un voisinage contient nécessairement a. Il n'est pas nécessairement ouvert : $[a-1, a+1]$ est aussi un voisinage de a.

Exemple 1 – Reconnaître un voisinage

$]-1, 2[$ et $[-1, 1]$ sont des voisinages de 0. En revanche, $[0, 1[$ n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$: il ne contient aucun intervalle $]-\delta, \delta[$. C'est toutefois un voisinage relatif de 0 dans $[0, +\infty[$.

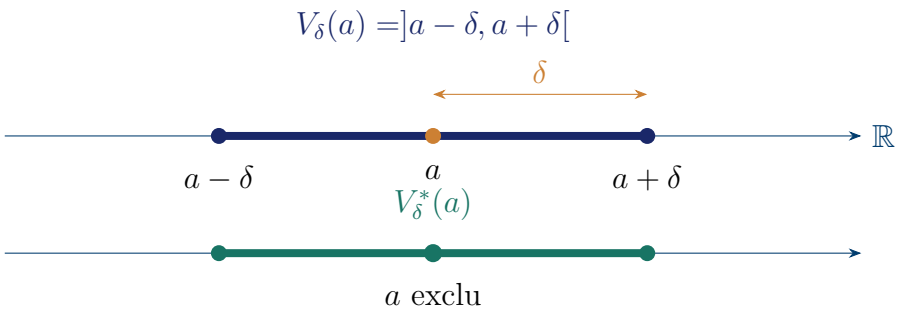


Figure 1.1 – Voisinage symétrique et voisinage épointé d'un point réel.

1.1.2 Voisinages relatifs et approches unilatérales

Définition 1.1.2 – Voisinage relatif et point d'accumulation

Si $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in D$, un **voisinage relatif** de a dans D est une partie de D contenant $D \cap V_\delta(a)$ pour un $\delta > 0$.
Un réel a, appartenant ou non à D, est un **point d'accumulation** de D lorsque

$$\forall \delta > 0, \qquad D \cap V_\delta^*(a) \neq \varnothing.$$

Cette dernière hypothèse permet de faire tendre des points de D vers a en restant distinct de a. Par exemple, 0 est point d'accumulation de $]0,1[$; un point isolé de D ne l'est pas.

Pour $x \to a^+$, on travaille sur $D \cap]a, a+\delta[$. Pour $x \to a^-$, on travaille sur $D \cap]a-\delta, a[$. On suppose qu'il existe des points du domaine arbitrairement proches de a du côté considéré.

Exemple 2 – Le domaine impose le côté

Pour $\ln x$ en 0, l'approche est $x \to 0^+$. Pour $\sqrt{x-a}$ en a, on étudie $x \to a^+$. Pour $|x|$ en 0, les deux côtés sont possibles ; pourtant $\frac{|x|}{x} = 1$ à droite et $\frac{|x|}{x} = -1$ à gauche.

1.1.3 Voisinages à l'infini et propriétés locales

Définition 1.1.3 – Voisinages de l'infini

Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si elle contient un intervalle $]A, +\infty[$ pour un $A \in \mathbb{R}$. Elle est un voisinage de $-\infty$ si elle contient $]-\infty, A[$.

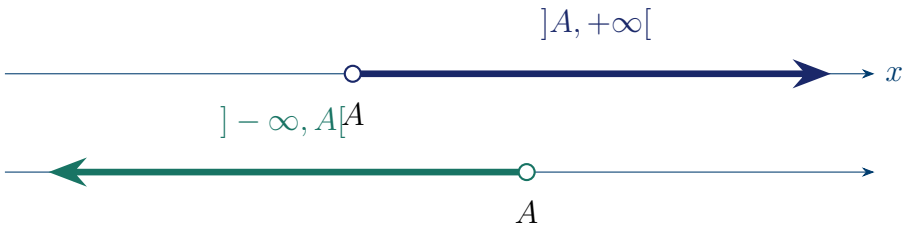


Figure 1.2 – À l'infini, les voisinages contiennent des demi-droites.

Définition 1.1.4 – Propriété vraie au voisinage d'un point

Une propriété $P(x)$ est vraie **au voisinage épointé de a sur D** si elle est vraie pour tout $x \in D$ suffisamment proche de a, avec $x \neq a$. À $+\infty$, elle doit être vraie pour tout $x \in D$ assez grand.

Ainsi, $x^2 < |x|$ au voisinage épointé de 0, et $x^2 > x$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 1.1.5 – Intersection de voisinages

L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est encore un voisinage de a.

Démonstration. Pour deux voisinages contenant respectivement $V_{\delta_1}(a)$ et $V_{\delta_2}(a)$, choisir $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. À $+\infty$, choisir le plus grand des seuils. Le cas fini général s'obtient par récurrence. ■

Attention – Une intersection infinie peut échouer
$\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0. Dans un calcul, on peut donc réunir un nombre fini de conditions locales ; une infinité de conditions demande une justification supplémentaire.

1.2 Rappels sur les limites et cadre des comparaisons

1.2.1 Limites finies et infinies

Définition 1.2.1 – Point d'accumulation
Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que a est un **point d'accumulation** de D si tout voisinage de a contient au moins un point de D différent de a.
Autrement dit,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in D, \quad 0 < |x - a| < \varepsilon.}$$

Remarque –
Un point d'accumulation de D n'appartient pas nécessairement à D.
Par exemple, 0 est un point d'accumulation de $D =]0, 1[$, bien que $0 \notin D$.

Exemple 3 –
Considérons les ensembles suivants :

i) $D = [0, 1]$: le point 0 est un point d'accumulation de D.

ii) $D =]0, 1[$: le point 0 est également un point d'accumulation de D.

iii) $D = \{0\} \cup [1, 2]$: le point 0 n'est pas un point d'accumulation de D.

Définition 1.2.2 – Limite finie en un point fini
Pour $\ell \in \mathbb{R}$, écrire $\lim\limits_{x \to a,\ x \in D} f(x) = \ell$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

La valeur de $f(a)$, si elle existe, n'intervient pas dans cette définition. La continuité en a ajoute la condition $\ell = f(a)$. L'ordre des quantificateurs est essentiel : δ peut dépendre de ε, mais pas du point x.
À $+\infty$, la définition devient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in D, \quad x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

La limite $f(x) \to +\infty$ en un point fini s'écrit

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

On adapte ces formules aux limites unilatérales et à $-\infty$.

Proposition 1.2.3 – Deux conséquences utiles

Si $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage épointé de a. Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors f est non nulle et du même signe que ℓ au voisinage épointé de a.

Démonstration. Avec $\varepsilon = 1$, on obtient $|f(x)| \leq |\ell| + 1$ assez près de a. Si $\ell \neq 0$, prendre $\varepsilon = |\ell|/2$: $f(x)$ reste dans un intervalle ne contenant pas 0. ■

1.2.2 Conventions pour les notations de Landau

Les lettres f, g, h désignent des fonctions réelles définies sur D. Les égalités contenant O ou o sont des écritures asymptotiques, toutes prises au **même point d'approche**. On écrit, par exemple,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a), \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

Lorsque le point est fixé dans un paragraphe, on peut l'omettre. Les définitions par inégalités restent valables si g s'annule. **Tout quotient par g suppose cependant que $g(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé du point considéré.**

Méthode – Ramener un point fini à zéro

Pour étudier f au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, poser $h = x - a$. Alors $x \to a$ équivaut à $h \to 0$. Par exemple,

$$\sin(x - a) \sim x - a \quad (x \to a)$$

est exactement l'équivalent $\sin h \sim h$ lorsque $h \to 0$. À $+\infty$, la substitution $t = 1/x$ ramène l'étude à $t \to 0^+$.

1.3 Domination : la notation grand O

1.3.1 Définition et critère du quotient

Définition 1.3.1 – Fonction dominée

On dit que f est **dominée par g au voisinage de** a, et l'on écrit $f(x) = O(g(x))$ lorsque $x \to a$, s'il existe une constante $C > 0$ et un voisinage épointé sur lequel

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|, \qquad x \in D.$$

À un point fini, cela signifie

$$\exists C > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

La constante C est indépendante de x. Elle n'a pas à être petite. La domination compare des **valeurs absolues**.

Proposition 1.3.2 – Critère de domination

Si g ne s'annule pas au voisinage épointé de a, alors

$$f = O(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage épointé de } a.$$

En particulier, si f/g admet une limite réelle, alors $f = O(g)$.

Démonstration. Il suffit de diviser $|f(x)| \leq C|g(x)|$ par $|g(x)| > 0$. Une fonction ayant une limite réelle est localement bornée. ■

1.3.2 Exemples et signification graphique

Exemple 4 – Trois situations différentes

i) En 0, $\sin x = O(x)$, car $|\sin x| \leq |x|$.

ii) À $+\infty$, $3x^2 - 5x + 1 = O(x^2)$: pour $x \geq 1$, $|3x^2 - 5x + 1| \leq 9x^2$.

iii) En 0, $x \sin(1/x) = O(x)$, alors que le quotient $\sin(1/x)$ n'a pas de limite.

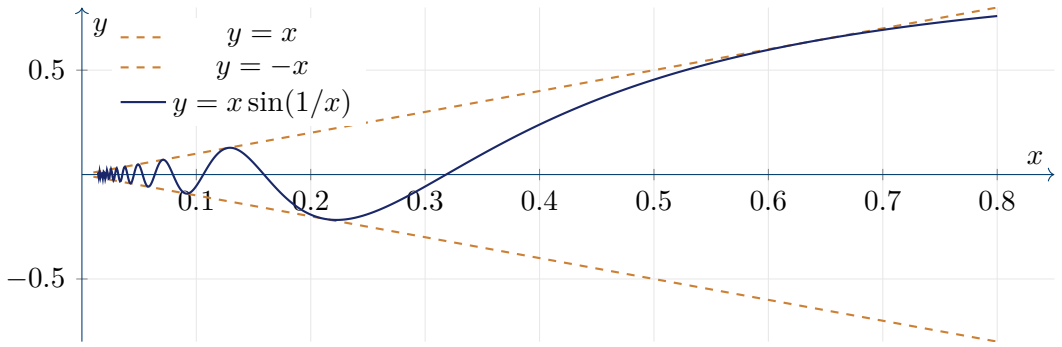


Figure 1.3 – Une fonction dominée par x reste entre les enveloppes $\pm x$. Les oscillations du quotient n'empêchent pas la domination.

Remarque – La notation $O(1)$

$f(x) = O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage considéré. Cela n'implique ni l'existence d'une limite ni la convergence vers 0. Par exemple, $\sin(1/x) = O(1)$ en 0.

1.3.3 Premières propriétés

Proposition 1.3.3 – Calculs avec la domination

Au même point d'approche :

i) $f = O(f)$; si $f = O(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = O(h)$;

ii) si $f = O(g)$ et $h = O(g)$, alors $f + h = O(g)$;

iii) si $f = O(g)$ et $h = O(k)$, alors $fh = O(gk)$;

iv) si $f = O(g)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f = O(g)$.

Démonstration. Sur un voisinage commun, les majorations se multiplient ou s'additionnent. Par exemple, $|f| \leq C_1|g|$ et $|h| \leq C_2|g|$ donnent $|f + h| \leq (C_1 + C_2)|g|$; deux majorations successives donnent $|f| \leq C_1 C_2 |h|$. ■

Attention – Domination ne signifie pas équivalence

En 0, $2x = O(x)$ mais $2x \not\sim x$. On a aussi $x^2 = O(x)$, tandis que x n'est pas $O(x^2)$. La domination n'est donc pas symétrique.

1.4 Fonctions négligeables : la notation petit o

1.4.1 Définition et caractérisations

Définition 1.4.1 – Fonction négligeable

On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a, et l'on écrit $f(x) = o(g(x))$ lorsque $x \to a$, si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, sur un voisinage épointé assez petit,

$$|f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, la définition précise est

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

À $+\infty$, on remplace $0 < |x - a| < \delta$ par $x > A$, avec un seuil A pouvant dépendre de ε. La différence avec O est fondamentale : la constante de comparaison peut ici être choisie **arbitrairement petite**, à condition de se rapprocher suffisamment du point.

Théorème 1.4.2 – Critère du quotient et factorisation

Si g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a, alors

$$\boxed{f = o(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.}$$

Plus généralement, même si g s'annule, on a la caractérisation

$$f = o(g) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x)\eta(x) \text{ localement, avec } \eta(x) \to 0.$$

Démonstration. Lorsque $g \neq 0$, la définition donne $|f/g| \leq \varepsilon$, ce qui équivaut à $f/g \to 0$. Dans le cas général, la définition avec $\varepsilon = 1$ impose $f(x) = 0$ aux zéros de g suffisamment proches de a. On pose alors $\eta(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$, et $\eta(x) = 0$ sinon. Les inégalités de la définition montrent que $\eta \to 0$. La réciproque est immédiate par multiplication. ■

Exemple 5 – Une preuve avec les quantificateurs

Montrons $x^2 = o(x)$ en 0. Pour $\varepsilon > 0$, choisir $\delta = \varepsilon$. Si $0 < |x| < \delta$, alors

$$|x^2| = |x|\, |x| \leq \varepsilon |x|.$$

On retrouve le même résultat en calculant $x^2/x = x \to 0$.

1.4.2 Interprétation, exemples et pièges

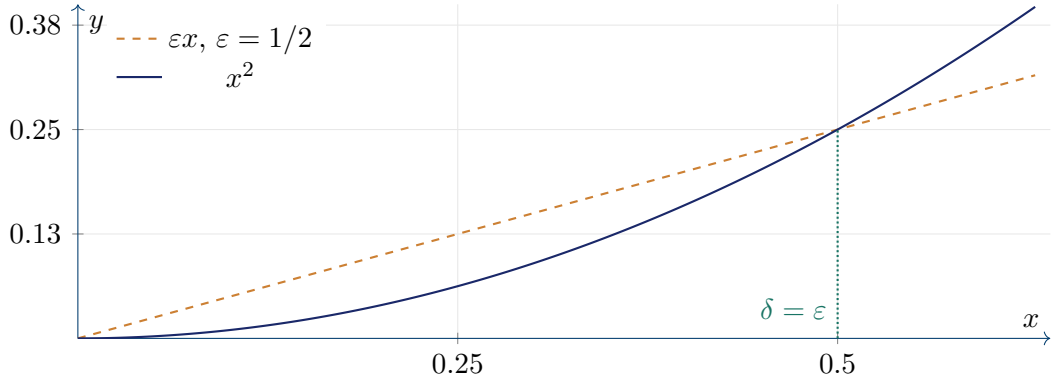


Figure 1.4 – Pour $0 < x < \varepsilon$, on a $x^2 < \varepsilon x$. Pour chaque pente $\varepsilon > 0$, l'inégalité devient vraie assez près de 0.

Exemple 6 – La négligeabilité est une comparaison relative

i) En 0, $x^3 = o(x^2)$ et $x^2 = o(|x|)$.

ii) À $+\infty$, $x = o(x^2)$ et $1 = o(x)$.

iii) En 0^+, $1/x = o(1/x^2)$, bien que $1/x \to +\infty$.

iv) À $+\infty$, $x^2 + x = o(x^3)$, car $(x^2 + x)/x^3 = 1/x + 1/x^2 \to 0$.

Ainsi, **une fonction négligeable ne tend pas nécessairement vers** 0. C'est son rapport à la fonction de référence qui tend vers 0, lorsque ce rapport est défini.

Proposition 1.4.3 – Lien avec les limites et la domination

$$f = o(1) \iff f \to 0, \qquad f = \ell + o(1) \iff f \to \ell \in \mathbb{R}.$$

De plus, $f = o(g)$ entraîne $f = O(g)$. Si $f = o(g)$ et $g = O(1)$, alors $f \to 0$.

Démonstration. Les deux premières équivalences sont les définitions des limites. La domination découle de la définition de o avec $\varepsilon = 1$. Enfin, si $f = g\eta$, avec $\eta \to 0$ et g bornée, alors $f \to 0$. ■

Attention – La réciproque est fausse

$x = O(x)$ en 0, mais $x \neq o(x)$: le quotient vaut 1. De même, le fait que $f \to 0$ et $g \to 0$ ne permet pas à lui seul de conclure que $f = o(g)$.

1.4.3 Opérations sur les petits o

Proposition 1.4.4 – Règles de calcul

Toutes les relations étant prises au même point :

i) $f = o(g)$ et $h = o(g)$ entraînent $f + h = o(g)$;

ii) $f = o(g)$ entraîne $\lambda f = o(g)$ pour toute constante λ ;

iii) $f = o(g)$ et $h = O(k)$ entraînent $fh = o(gk)$;

iv) $f = o(g)$ et $g = O(h)$ entraînent $f = o(h)$;

v) $f = O(g)$ et $g = o(h)$ entraînent $f = o(h)$.

En particulier, la négligeabilité est transitive : $f = o(g)$ et $g = o(h)$ impliquent $f = o(h)$.

Démonstration. Pour la somme, écrire $f = g\eta_1$ et $h = g\eta_2$, où $\eta_1, \eta_2 \to 0$. Alors $f + h = g(\eta_1 + \eta_2)$. Pour le produit, $|h| \leq C|k|$ donne $|fh| \leq C|\eta_1||gk|$. Les deux dernières propriétés se déduisent de la même estimation. ■

On abrège ces règles sous la forme

$$o(g) + o(g) = o(g), \qquad O(g) + o(g) = O(g),$$
$$o(g)\,O(k) = o(gk), \qquad o(g)\,o(k) = o(gk).$$

Ce sont des règles sur les restes, et non des égalités entre une même fonction appelée « o ».

Attention – Chaque petit o représente un reste

Dans $r_1(x) = o(x)$ et $r_2(x) = o(x)$, les fonctions r_1 et r_2 peuvent être différentes. On sait que $r_1 - r_2 = o(x)$, mais on ne peut pas affirmer $r_1 - r_2 = 0$. De même, on ne divise jamais formellement « par $o(x)$ ».

Exemple 7 – Ordre d'un produit

Si $r(x) = o(x^2)$ en 0, alors $x\,r(x) = o(x^3)$. Si $s(x) = O(x)$, alors $r(x)s(x) = o(x^3)$. Enfin, $o(x^2) = o(x)$ en 0, puisque $x^2 = o(x)$. Cette dernière règle change lorsque le point d'approche change.

1.5 Fonctions équivalentes

1.5.1 Définition et erreur relative

Définition 1.5.1 – Équivalence

On dit que f et g sont **équivalentes au voisinage de** a, et l'on écrit $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to a$, si

$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

Autrement dit, $f(x) = g(x)(1 + \eta(x))$ avec $\eta(x) \to 0$. Si g ne s'annule pas au voisinage épointé de a, cela équivaut à

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.}$$

L'erreur *relative* $(f-g)/g$ tend vers 0. L'erreur *absolue* $f-g$ ne tend pas nécessairement vers 0.

Exemple 8 – Erreur absolue et erreur relative

À $+\infty$, $x^2+x \sim x^2$, car

$$\frac{x^2+x}{x^2} = 1+\frac{1}{x} \longrightarrow 1.$$

Pourtant $(x^2+x)-x^2 = x \to +\infty$. En 0, on a $\sin x \sim x$; ici l'erreur absolue tend aussi vers 0.

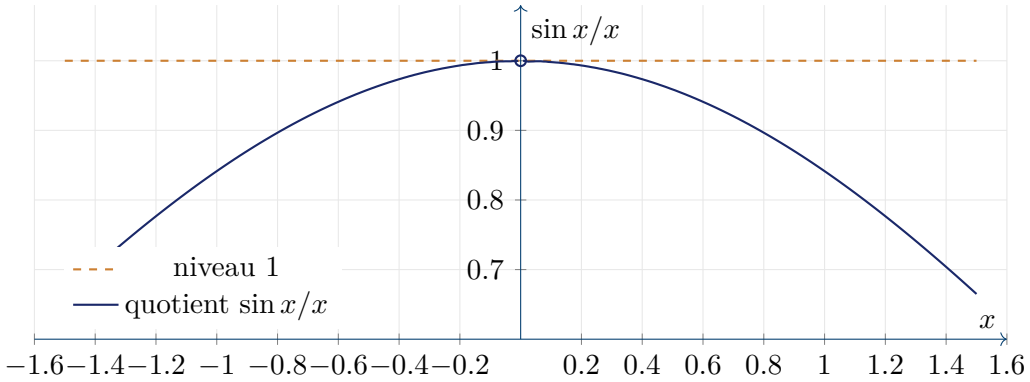


Figure 1.5 – L'équivalence $\sin x \sim x$ en 0 se lit sur le quotient : celui-ci se rapproche de 1 des deux côtés.

1.5.2 Propriétés fondamentales

Proposition 1.5.2 – Relation d'équivalence

Au même point d'approche, la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

Démonstration. La réflexivité vient de $f-f=0=o(f)$. Si $f=g(1+\eta)$ et $\eta \to 0$, alors $1+\eta$ est non nul assez près du point étudié et

$$g = f\left(1-\frac{\eta}{1+\eta}\right).$$

Le terme $-\eta/(1+\eta)$ tend vers 0, d'où la symétrie. Enfin, si $g=h(1+\theta)$ avec $\theta \to 0$, alors $f=h(1+\eta+\theta+\eta\theta)$, d'où la transitivité. ∎

Proposition 1.5.3 – Signe, limites et terme prépondérant

Si $f \sim g$, alors :

i) $f=O(g)$ et $g=O(f)$;

ii) si g est localement non nulle, f et g ont le même signe assez près du point étudié ;

iii) si $g \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f \to \ell$;

iv) $g+r \sim g$ si et seulement si $r=o(g)$.

De plus, si $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors $f \to \ell$ équivaut à $f \sim \ell$.

Démonstration. Écrire $f = g(1+\eta)$, où $\eta \to 0$. Localement, $1/2 < 1+\eta < 3/2$, ce qui donne les comparaisons et la conservation du signe. Le passage à la limite suit du produit ; pour une limite infinie, l'encadrement conserve la divergence et son signe. Le dernier point est la définition appliquée à $f = g + r$. ■

Attention – Une limite n'est pas un équivalent

Deux fonctions de même limite nulle ne sont pas nécessairement équivalentes : x et x^2 tendent vers 0, mais $x^2/x \to 0$. Deux fonctions de limite $+\infty$ ne le sont pas davantage. L'écriture $f \sim 0$ n'exprime pas « $f \to 0$ » : avec notre définition, elle imposerait que f soit identiquement nulle sur un voisinage épointé. On écrit $f = o(1)$ pour exprimer $f \to 0$.

1.5.3 Produits, quotients et puissances

Théorème 1.5.4 – Opérations compatibles avec l'équivalence

Supposons $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au même point. Alors

$$f_1 f_2 \sim g_1 g_2.$$

Si les dénominateurs sont non nuls localement,

$$\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}.$$

Pour tout entier $m \geq 1$, $f_1^m \sim g_1^m$. Si f_1 et g_1 sont strictement positives localement, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_1^\alpha \sim g_1^\alpha.$$

Démonstration. Écrire $f_i = g_i(1+\eta_i)$, avec $\eta_i \to 0$. Les facteurs $(1+\eta_1)(1+\eta_2)$ et $(1+\eta_1)/(1+\eta_2)$ tendent vers 1. Pour les puissances réelles, utiliser la continuité de $t \mapsto t^\alpha$ en 1. ■

Exemple 9 – Calcul multiplicatif

En 0, $\sin(2x) \sim 2x$ et $e^{3x} - 1 \sim 3x$. Ainsi,

$$\frac{\sin(2x)}{e^{3x}-1} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{e^{3x}-1} = \frac{2}{3}.$$

1.5.4 Sommes, différences et compositions

Attention – On n'additionne pas les équivalents sans précaution

À $+\infty$, $x+1 \sim x$ et $-x+1 \sim -x$, alors que

$$(x+1)+(-x+1) = 2, \qquad x+(-x) = 0.$$

Les termes principaux se compensent. En particulier, $\sin x \sim x$ en 0 ne donne aucun équivalent de $\sin x - x$.

Proposition 1.5.5 – Somme en l'absence de compensation

Si $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ et

$$|g_1| + |g_2| = O(|g_1 + g_2|),$$

alors $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$. La condition est notamment vérifiée lorsque g_1 et g_2 ont le même signe localement.

Démonstration. Écrire $f_i - g_i = g_i\eta_i$, avec $\eta_i \to 0$. L'erreur de la somme est majorée en valeur absolue par $(|\eta_1| + |\eta_2|)(|g_1| + |g_2|)$, donc elle est négligeable devant $g_1 + g_2$. ■

Proposition 1.5.6 – Substitution de la variable

Si $f(t) = o(g(t))$ lorsque $t \to a$, et si $u(x) \to a$ lorsque $x \to b$, alors

$$f(u(x)) = o(g(u(x))) \quad (x \to b),$$

à condition que $u(x)$ reste dans le domaine considéré et, pour un point fini, évite a au voisinage épointé de b. La même règle vaut pour O et $\sim$.

Démonstration. L'image par u d'un point suffisamment proche de b appartient au voisinage où la comparaison initiale est valide. Les inégalités définissant O et o se transmettent alors. ■

Si u peut atteindre a, il suffit que les expressions soient définies et que les relations nécessaires soient aussi valables en a.

Attention – Une fonction appliquée aux équivalents

La substitution précédente ne signifie pas que $f \sim g$ entraîne toujours $\Phi(f) \sim \Phi(g)$. À $+\infty$, $x + 1 \sim x$, mais $e^{x+1}/e^x = e \neq 1$. En revanche, si $f - g \to 0$, alors $e^f/e^g = e^{f-g} \to 1$.

Pour le logarithme, si $f, g > 0$ et $f \sim g$, alors

$$\ln f - \ln g = \ln(f/g) \longrightarrow 0.$$

On peut en déduire $\ln f \sim \ln g$ si $\ln g$ reste en valeur absolue minoré par une constante strictement positive. Ce raisonnement ne suffit pas lorsque $g \to 1$: en 0, $1 + x \sim 1 + 2x$, mais $\ln(1 + x)/\ln(1 + 2x) \to 1/2$.

1.6 Équivalents usuels et échelles de comparaison

1.6.1 Équivalents fondamentaux en zéro

Théorème 1.6.1 – Table des équivalents usuels

Lorsque $u \to 0$, on dispose des relations suivantes :

Équivalent	Condition locale
$\sin u \sim u$	u réel
$\tan u \sim u$	$\cos u \neq 0$ près de 0
$e^u - 1 \sim u$	u réel
$\ln(1+u) \sim u$	$1+u>0$
$(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$	$\alpha \neq 0$ fixé, $1+u>0$
$\sqrt{1+u} - 1 \sim u/2$	$1+u>0$
$1-\cos u \sim u^2/2$	u réel
$\arcsin u \sim u$, $\arctan u \sim u$	u assez proche de 0

Les angles sont exprimés en **radians**.

Démonstration. Si φ est dérivable en 0, avec $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)\neq 0$, alors

$$\frac{\varphi(u)}{u} \longrightarrow \varphi'(0), \qquad \varphi(u) \sim \varphi'(0)u.$$

Ce critère donne toutes les lignes sauf celle de $1-\cos u$. Pour cette dernière, l'identité $1-\cos u = 2\sin^2(u/2)$ et $\sin(u/2)\sim u/2$ donnent le résultat. La racine peut aussi être traitée par conjugaison : $\sqrt{1+u}-1 = u/(\sqrt{1+u}+1)$. ■

Méthode – Reconnaître la petite quantité

L'argument doit tendre vers 0. En 0, $\ln(1+3x^2)\sim 3x^2$. À $+\infty$, $\sin(1/x)\sim 1/x$. En revanche, $\sin x \sim x$ est faux à $+\infty$: l'argument x ne tend pas vers 0.

Exemple 10 – Équivalent en un point non nul

Lorsque $x\to 2$, poser $h = x-2$. Alors

$$e^x - e^2 = e^2(e^h-1) \sim e^2 h = e^2(x-2), \qquad \ln x - \ln 2 = \ln(1+h/2) \sim \frac{x-2}{2}.$$

1.6.2 Comparaison des puissances

Proposition 1.6.2 – Puissances en zéro et à l'infini

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, avec $\alpha<\beta$.

$$x^\beta = o(x^\alpha) \quad (x\to 0^+), \qquad x^\alpha = o(x^\beta) \quad (x\to+\infty).$$

Pour une approche bilatérale de 0, on remplace les puissances réelles par $|x|^\alpha$ et $|x|^\beta$.

Démonstration. Les quotients utiles sont $x^{\beta-\alpha}\to 0$ en 0^+ et $x^{\alpha-\beta}\to 0$ à $+\infty$. ■

Exemple 11 – Quel terme domine un polynôme ?
Si $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_n x^n$, avec $a_m a_n \neq 0$ et $m \leq n$, alors

$$P(x) \sim a_m x^m \quad (x \to 0), \qquad P(x) \sim a_n x^n \quad (x \to \pm\infty).$$

Ainsi, $3x^2 - 5x^4 + 2x^6 \sim 3x^2$ en 0 et $3x^2 - 5x^4 + 2x^6 \sim 2x^6$ à l'infini. Le terme dominant est celui de plus petit degré en 0, et celui de plus grand degré à l'infini.

1.6.3 Croissances comparées

Théorème 1.6.3 – Logarithme, puissances et exponentielle
Pour tous $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $c > 0$,

$$(\ln x)^\beta = o(x^\alpha), \qquad x^\alpha = o(e^{cx}) \qquad (x \to +\infty).$$

Par changement de variable,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta \longrightarrow 0 \quad (x \to 0^+).$$

Démonstration. Pour $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 0$, on a $e^t \geq t^n/n!$. On le démontre par récurrence : $e^t \geq 1$, puis l'intégration de $e^s \geq s^n/n!$ sur $[0,t]$ donne $e^t = 1 + \int_0^t e^s\,ds \geq t^{n+1}/(n+1)!$. Choisissons $n > \alpha$; alors

$$0 \leq \frac{x^\alpha}{e^{cx}} \leq \frac{n!}{c^n x^{\,n-\alpha}} \longrightarrow 0.$$

Pour le logarithme, poser $t = \ln x$: $(\ln x)^\beta / x^\alpha = t^\beta / e^{\alpha t} \to 0$. Enfin, pour $x \to 0^+$, poser $t = 1/x \to +\infty$. ∎

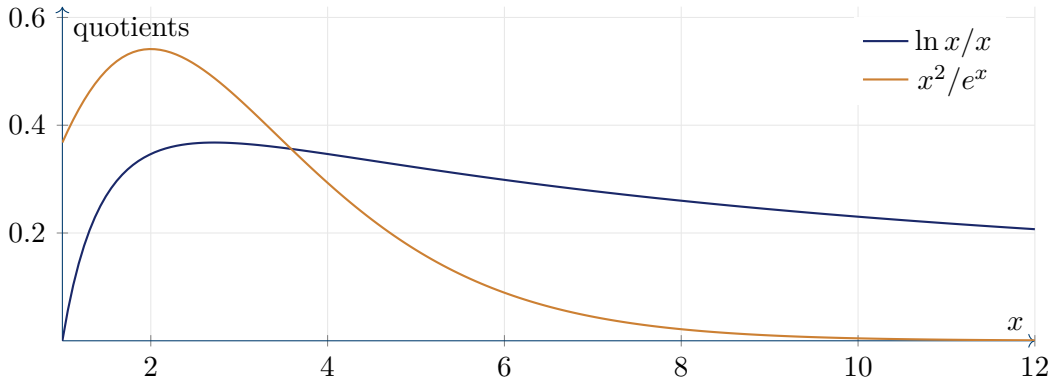


Figure 1.6 – Les quotients tendent vers 0 à l'infini. Le graphe illustre les théorèmes ; un intervalle de tracé fini ne les démontre pas.

Remarque – Lire une échelle de comparaison
À $+\infty$, pour $0 < \alpha < \beta$ et $c > 0$, on peut lire la chaîne

$$1 = o(\ln x), \quad \ln x = o(x^\alpha), \quad x^\alpha = o(x^\beta), \quad x^\beta = o(e^{cx}).$$

En 0^+, les puissances positives de plus grand exposant sont les plus petites. Il faut toujours vérifier le sens de l'approche.

1.7 Convexité et comparaison des fonctions

La convexité permet de comparer les valeurs d'une fonction avec celles obtenues par interpolation entre deux points. Elle fournit également des inégalités utiles pour l'étude locale des fonctions, notamment par comparaison avec les tangentes.

1.7.1 Fonctions convexes et interprétation géométrique

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.7.1 – Ensemble convexe

Une partie C de $\mathbb{R}$ est dite **convexe** si, pour tous $x, y \in C$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C.$$

Autrement dit, C est convexe si, pour tous $x, y \in C$, le segment

$$[x,y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\}$$

est entièrement contenu dans C.

Remarque – Convexité des intervalles

Une partie de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si elle est un intervalle.
En particulier, l'intervalle I est convexe : pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in I.$$

Cette propriété permet de définir la convexité d'une fonction sur I.

Définition 1.7.2 – Fonction convexe et fonction concave

La fonction f est dite **convexe** sur I si, pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Elle est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe, c'est-à-dire lorsque l'inégalité précédente est inversée.

Remarque – Interprétation géométrique

Le point $(1-\lambda)x + \lambda y$ appartient au segment $[x,y]$. La quantité $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ est l'ordonnée correspondante sur la corde reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Ainsi, le graphe d'une fonction convexe est situé **au-dessous de ses cordes** ; celui d'une fonction concave est situé **au-dessus de ses cordes**.

Exemple 12 – La fonction carré est convexe

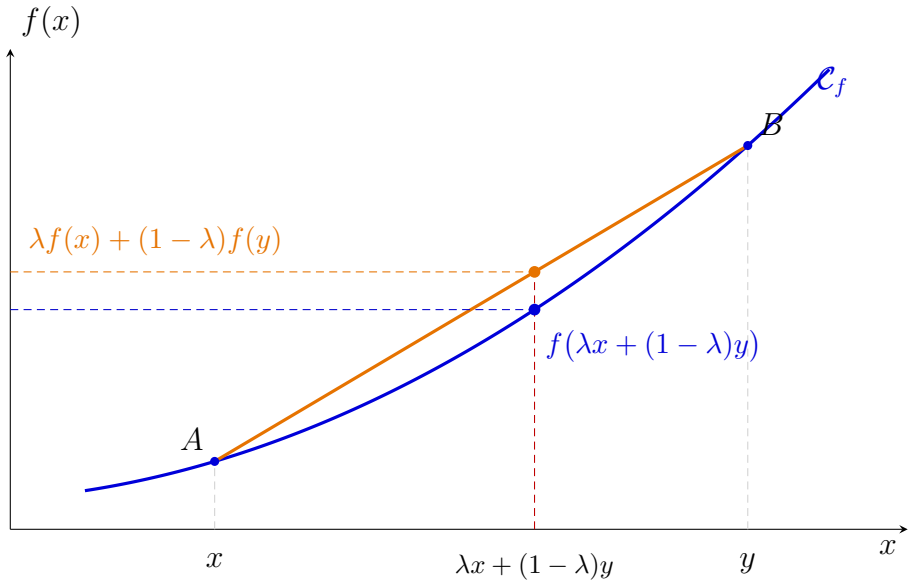


Figure 1.7 – Caractérisation géométrique d'une fonction convexe par ses cordes.

Considérons $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x^2 + \lambda y^2 - \Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big)^2 \\ = \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big)^2 \leq (1-\lambda)x^2 + \lambda y^2.$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

1.7.2 Inégalité de Jensen

Proposition 1.7.3 – Inégalité de Jensen

Soit f convexe sur I. Pour tous $x_1, \ldots, x_r \in I$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f(x_k).$$

Pour une fonction concave, le sens de l'inégalité est inversé.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur le nombre r de points. Pour $r = 2$, il s'agit exactement de la définition de la convexité. Supposons le résultat établi pour r points et considérons $r+1$ points avec des poids de somme 1. Si $\lambda_{r+1} = 1$, l'égalité est immédiate. Sinon, posons

$$s = 1 - \lambda_{r+1} > 0, \qquad z = \sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k}{s} x_k.$$

Les nombres $\frac{\lambda_k}{s}$ sont positifs et de somme 1. Par convexité, puis par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k x_k\right) &= f\Big(sz+\lambda_{r+1}x_{r+1}\Big) \\ &\leq sf(z)+\lambda_{r+1}f(x_{r+1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{r}\lambda_k f(x_k)+\lambda_{r+1}f(x_{r+1}). \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout $r \geq 2$. ■

Exemple 13 – Une inégalité issue de Jensen

En appliquant Jensen à la fonction convexe $t \mapsto t^2$ avec deux poids égaux à $1/2$, on obtient

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

1.7.3 Inégalité des pentes

Théorème 1.7.4 – Inégalité des pentes

Si f est convexe sur I, alors, pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Démonstration. Comme $x < y < z$, on peut écrire

$$y = (1-\lambda)x+\lambda z, \qquad \lambda = \frac{y-x}{z-x} \in]0,1[.$$

La convexité donne

$$f(y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(z).$$

En soustrayant $f(x)$ puis en utilisant $y-x = \lambda(z-x)$, on obtient

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

De même, en soustrayant cette fois $f(y)$ de $f(z)$ et en utilisant $z-y = (1-\lambda)(z-x)$, il vient

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

D'où les deux inégalités annoncées. ■

Remarque – Sens des pentes

Les quotients précédents représentent les pentes des droites sécantes au graphe. Pour une fonction convexe, ces pentes augmentent lorsque l'on se déplace de gauche à droite. Pour une fonction concave, les inégalités sont inversées.

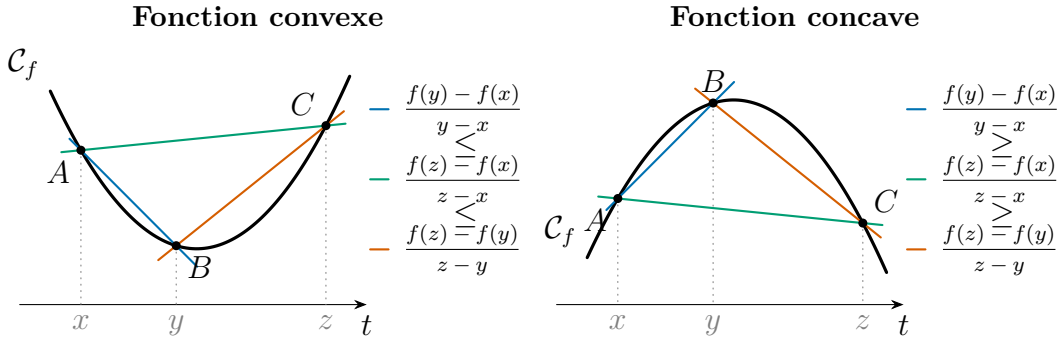


Figure 1.8 – Sens des pentes des sécantes : fonction convexe à gauche et fonction concave à droite.

1.7.4 Caractérisations par les dérivées

Théorème 1.7.5 – Convexité, dérivée et tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert I. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe sur I ;

ii) f' est croissante sur I ;

iii) pour tous $a, x \in I$,
$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

La dernière propriété signifie que le graphe de f est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration. **(i) ⇒ (ii).** Supposons f convexe et soient $x < y$ dans I. L'inégalité des pentes, appliquée à $x < t < y$, donne
$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(t)}{y-t}.$$
En faisant tendre t vers x dans la première inégalité, puis vers y dans la seconde, il vient
$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y).$$
Ainsi f' est croissante.

(ii) ⇒ (iii). Supposons f' croissante et fixons $a \in I$. Pour $x \neq a$, le théorème des accroissements finis fournit un point c situé entre a et x tel que
$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a).$$
Si $x > a$, on a $f'(c) \geq f'(a)$; si $x < a$, on a $f'(c) \leq f'(a)$, mais $x - a < 0$. Dans les deux cas,
$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a).$$
L'inégalité est également vraie pour $x = a$.

(iii) ⇒ (i). Soient $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ et $a = (1-\lambda)x + \lambda y$. En appliquant l'inégalité des tangentes aux points x et y, on obtient
$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a),$$
$$f(y) \geq f(a) + f'(a)(y-a).$$

Multiplions respectivement par $1-\lambda$ et λ, puis additionnons. Comme $(1-\lambda)(x-a)+\lambda(y-a) = 0$, il reste

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f(a).$$

C'est la définition de la convexité. ■

Proposition 1.7.6 – Critère de la dérivée seconde

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors

$$f \text{ est convexe sur } I \iff f''(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in I.$$

De même, f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$. En particulier, si $f'' > 0$ sur I, alors f est strictement convexe sur I.

Démonstration. D'après le théorème précédent, f est convexe si et seulement si f' est croissante. Or, une fonction dérivable est croissante sur un intervalle si et seulement si sa dérivée est positive. En appliquant ce résultat à f', on obtient l'équivalence. Le cas concave découle de la convexité de $-f$. ■

Attention – Ne pas confondre convexité et convexité stricte

La condition $f''(x) > 0$ pour tout x est *suffisante* pour la stricte convexité, mais elle n'est pas nécessaire. Par exemple, $f(x) = x^4$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$, alors que $f''(0) = 0$. Pour la simple convexité, le critère exact est $f'' \geq 0$.

1.7.5 Applications à la comparaison des fonctions

Exemple 14 – Inégalités fondamentales

1. Fonction exponentielle. Puisque $(e^x)'' = e^x > 0$, la fonction exponentielle est convexe. Sa tangente en 0 ayant pour équation $y = 1 + x$, on déduit

$$e^x \geq 1 + x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2. Fonction logarithme. La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$, car $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$. Le graphe est donc au-dessous de sa tangente en 1 :

$$\ln x \leq x - 1, \qquad x > 0.$$

En posant $x = 1 + t$, on retrouve

$$\ln(1+t) \leq t, \qquad t > -1.$$

3. Fonction sinus. Sur $[0, \pi/2]$, on a $(\sin x)'' = -\sin x \leq 0$: la fonction sinus est concave. Sa tangente en 0 donne $\sin x \leq x$, tandis que la corde joignant $(0,0)$ à $(\pi/2, 1)$ donne

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 1.7.7 – Comparaison locale avec la tangente

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a. Si $f''(a) > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{pour } 0 < |x-a| < \delta.$$

Si $f''(a) < 0$, l'inégalité est inversée.

Démonstration. Supposons $f''(a) > 0$. Comme f'' est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que $f''(x) > 0$ pour $|x-a| < \delta$. Ainsi, f' est strictement croissante sur cet intervalle.

Fixons $x \neq a$ dans ce voisinage. D'après le théorème des accroissements finis, il existe c strictement compris entre a et x tel que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a).$$

Si $x > a$, on a $f'(c) > f'(a)$, et si $x < a$, on a $f'(c) < f'(a)$ mais $x - a < 0$. Dans les deux cas,

$$f(x) - f(a) > f'(a)(x-a).$$

Le cas $f''(a) < 0$ s'obtient en appliquant le même raisonnement à $-f$. ■

Remarque – Lien avec la comparaison locale

La convexité sur un intervalle fournit une comparaison *globale* avec toutes les tangentes. La continuité de la dérivée seconde permet aussi d'obtenir une comparaison *locale* avec la tangente lorsque $f''(a) \neq 0$. Ces deux points de vue se complètent dans l'étude des fonctions.

1.7.6 Complément : l'épigraphe

Définition 1.7.8 – Épigraphe d'une fonction

On appelle **épigraphe** de $f : I \to \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\operatorname{epi}(f) = \Big\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : \ y \geq f(x)\Big\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points du plan situés sur le graphe de f ou au-dessus de celui-ci.

Proposition 1.7.9 – Caractérisation par l'épigraphe

La fonction f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Supposons f convexe. Si (x,u) et (y,v) appartiennent à $\operatorname{epi}(f)$, alors $u \geq f(x)$ et $v \geq f(y)$. Pour $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \\ &\leq (1-\lambda)u + \lambda v. \end{aligned}$$

Le segment joignant ces deux points est donc contenu dans l'épigraphe : celui-ci est convexe.

Réciproquement, supposons l'épigraphe convexe. Comme $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ lui appartiennent, leur combinaison convexe y appartient également. Ainsi,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

ce qui prouve que f est convexe. ■

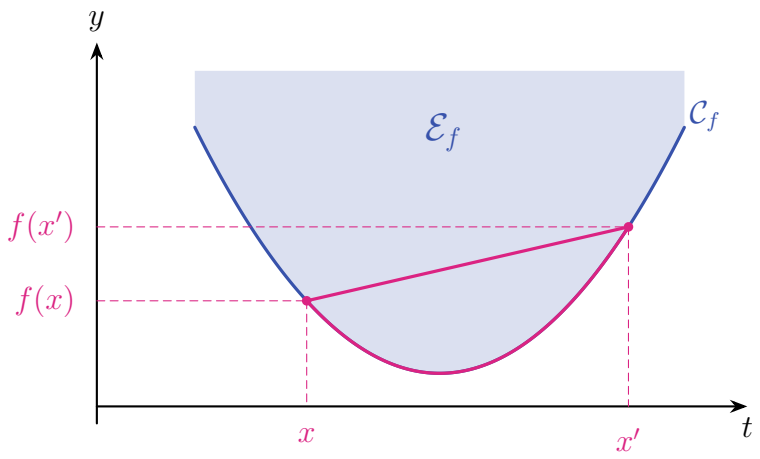


Figure 1.9 – Interprétation géométrique de l'épigraphe d'une fonction convexe. La corde reliant deux points du graphe est contenue dans l'épigraphe.

Remarque – Interprétation géométrique

L'épigraphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}.$$

Il représente la région du plan située au-dessus du graphe de f, ce qui correspond à la zone colorée sur la figure.
Si f est convexe, pour tous $x, x' \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f((1 - \lambda)x + \lambda x') \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(x').$$

Ainsi, le segment reliant les points $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est entièrement contenu dans l'épigraphe.
Plus généralement, tout segment reliant deux points de $\mathcal{E}_f$ reste dans $\mathcal{E}_f$. L'épigraphe est donc convexe.

Bibliographie

[1] J.-M. Monier, *Analyse MPSI*, Dunod, Paris.
[2] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, Paris.
[3] F. Liret et D. Martinais, *Analyse, 1re année : Cours et exercices avec solutions*, Dunod, Paris.