UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Analyse III

CHAPITRE II

Formules de Taylor

Polynôme de Taylor, restes, estimations et applications

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Table des matières

Notations et abréviations **ii**

2 Formules de Taylor **1**
2.1 Dérivées successives et polynôme de Taylor . . . 1
2.1.1 Régularité d'une fonction . . . 1
2.1.2 Construction et unicité du polynôme . . . 1
2.2 Formule de Taylor–Lagrange . . . 2
2.2.1 Un outil : le théorème de Rolle répété . . . 2
2.2.2 Énoncé et démonstration . . . 3
2.3 Inégalité de Taylor–Lagrange et contrôle d'erreur . . . 4
2.3.1 Estimation uniforme du reste . . . 4
2.3.2 Encadrements et signe du reste . . . 5
2.4 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 5
2.4.1 Énoncé et preuve . . . 5
2.4.2 Pourquoi cette forme est utile . . . 7
2.5 Formule de Taylor–Young . . . 8
2.5.1 Un résultat local . . . 8
2.5.2 Comparer les trois formules . . . 9
2.6 Applications locales : signe et extrema . . . 9
2.6.1 Premier terme non nul . . . 9
2.6.2 Position par rapport à la tangente . . . 10

Notations et abréviations

Notation	Signification
$I,\ a,\ x$	Intervalle d'étude ; point de référence ; point d'évaluation.
$h = x - a$	Accroissement à partir de a.
$f^{(k)}$	Dérivée d'ordre k ; $f^{(0)} = f$.
$\mathcal{C}^n(I)$	Fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre n sont continues sur I.
$k!,\ 0!$	Factorielle de k ; $0! = 1$.
$T_{n,a}(x)$	Polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a.
$R_{n,a}(x)$	Reste exact $f(x) - T_{n,a}(x)$.
M	Majorant de $\lvert f^{(n+1)}\rvert$ sur le segment considéré.
$c,\ \xi$	Point intermédiaire entre a et x, en général dépendant de x.
$o(h^n)$	Fonction négligeable devant h^n lorsque $h \to 0$.
$O(h^{n+1})$	Fonction dominée par h^{n+1} lorsque $h \to 0$.
TL	Formule de Taylor–Lagrange.
TY	Formule de Taylor–Young.
sup, max	Borne supérieure ; maximum lorsqu'il est atteint.

Chapitre 2

Formules de Taylor

2.1 Dérivées successives et polynôme de Taylor

2.1.1 Régularité d'une fonction

Définition 2.1.1 – Classe $\mathcal{C}^n$

Une fonction appartient à $\mathcal{C}^n(I)$ si elle possède sur I des dérivées jusqu'à l'ordre n, toutes continues. On pose $f^{(0)} = f$. Sur un segment, les dérivées aux extrémités sont comprises par prolongement continu depuis l'intérieur.

Les hypothèses de ce cours sont volontairement simples et suffisantes : on utilise $\mathcal{C}^{n+1}$ pour les restes de Lagrange et intégral, et $\mathcal{C}^n$ pour Taylor–Young. Certaines versions plus générales existent ; elles ne sont pas nécessaires ici.

Exemple 1 – Dérivées utilisées dans le cours

Pour tout entier $k \geq 1$,

$$(e^x)^{(k)} = e^x, \qquad (\ln x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad (x > 0).$$

Les dérivées de sin et cos se répètent avec une période de quatre. Pour $f(x) = x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$,

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}.$$

2.1.2 Construction et unicité du polynôme

Définition 2.1.2 – Polynôme et reste de Taylor

Si les dérivées de f jusqu'à l'ordre n existent en a, on définit

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x).$$

Le point a est le **centre** de l'approximation.

Proposition 2.1.3 – Contact des dérivées

$T_{n,a}$ est l'unique polynôme P de degré au plus n vérifiant

$$P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad (0 \le k \le n).$$

Démonstration. Écrire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$. Alors $P^{(k)}(a) = k! c_k$, donc nécessairement $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Ces coefficients donnent bien les égalités demandées. ■

L'ordre 0 donne la constante $f(a)$; l'ordre 1 donne la tangente $f(a) + f'(a)(x-a)$. L'ordre 2 ajoute une correction quadratique.

Exemple 2 – Trois polynômes en zéro

$$T_{3,0}^{\exp}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \qquad T_{3,0}^{\sin}(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

$$T_{3,0}^{\ln(1+\cdot)}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Il faut ensuite étudier le reste pour savoir dans quel sens ces polynômes approchent la fonction.

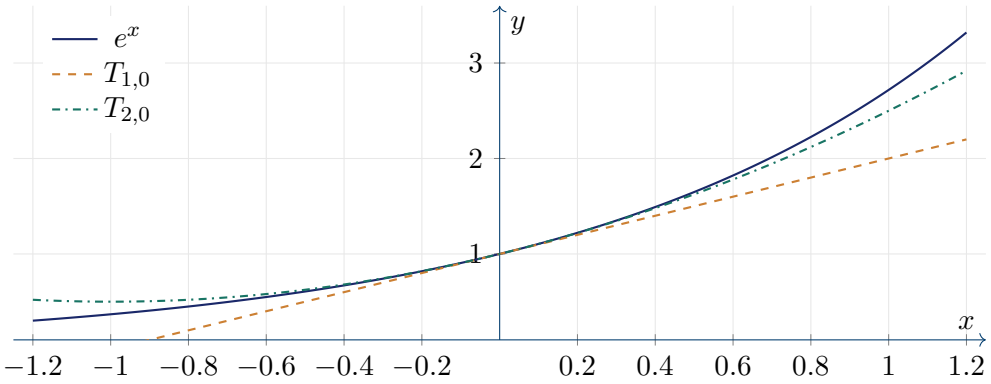


Figure 2.1 – Les polynômes de Taylor reproduisent de plus en plus de dérivées au centre. Leur précision doit être évaluée par le reste.

2.2 Formule de Taylor–Lagrange

2.2.1 Un outil : le théorème de Rolle répété

Proposition 2.2.1 – Annulations successives

Soient $a \neq b$ et $F \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment d'extrémités a, b. Si

$$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0, \qquad F(b) = 0,$$

alors il existe un point c strictement entre a et b tel que $F^{(n+1)}(c) = 0$.

Démonstration. Rolle appliqué à F entre a et b fournit un zéro c_1 de F'. Puis $F'(a) = F'(c_1) = 0$ fournit un zéro c_2 de F'' entre ces deux points. On poursuit de la même manière jusqu'à $F^{(n+1)}$. ■

2.2.2 Énoncé et démonstration

Théorème 2.2.2 – Taylor–Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$, où J est un intervalle contenant a et $x \neq a$. Il existe c strictement entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Démonstration. Posons $K = \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}$ et

$$F(t) = f(t) - T_{n,a}(t) - K(t-a)^{n+1}.$$

Par construction, $F(x) = 0$ et $F^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$. Le résultat précédent donne un c tel que

$$0 = F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n+1)!K$$

Alors

$$f^{(n+1)}(c) = (n+1)!K \Leftrightarrow K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Donc,

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

On en déduit,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

■

Remarque – Un point intermédiaire inconnu

Le point c dépend en général de a, x, n. Il n'est pas nécessaire de le déterminer. On utilise le fait qu'il appartient au segment pour encadrer $f^{(n+1)}(c)$. Pour $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.

Exemple 3 – Taylor en un centre différent de zéro

Pour $f(x) = \ln x$, au centre $a = 1$ et à l'ordre 2,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3c^3},$$

où c est strictement entre 1 et $x > 0$, pour $x \neq 1$. Les coefficients sont calculés au centre 1, et non au point x.

2.3 Inégalité de Taylor–Lagrange et contrôle d'erreur

2.3.1 Estimation uniforme du reste

Théorème 2.3.1 – Inégalité de Taylor–Lagrange
Sous les hypothèses précédentes, si $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ sur le segment reliant a à x, alors

$$\boxed{|f(x) - T_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.}$$

Si un même M convient pour $|x-a| \leq r$, la majoration est uniforme sur cet intervalle.

Démonstration. Prendre les valeurs absolues dans le reste de Lagrange et utiliser $|f^{(n+1)}(c)| \leq M$. ∎

Exemple 4 – Approximer $e^{0,1}$
À l'ordre 3 en 0,

$$T_{3,0}(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{6} = 1,1051666\ldots$$

Sur $[0\,;\,0{,}1]$, on peut utiliser le majorant simple $e^t \leq e < 3$. Il vient

$$|e^{0,1} - T_{3,0}(0,1)| \leq \frac{3(0,1)^4}{24} = 1,25 \times 10^{-5}.$$

Ainsi $1,10517$ est une valeur approchée avec une erreur inférieure à $1,6 \times 10^{-5}$, en incluant l'arrondi.

Exemple 5 – Approximer $\sin x$ par x
Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de sin en 0 est x. Comme $|\sin^{(3)} t| = |\cos t| \leq 1$,

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Pour $|x| \leq 0,1$, l'erreur est au plus $1/6000$.

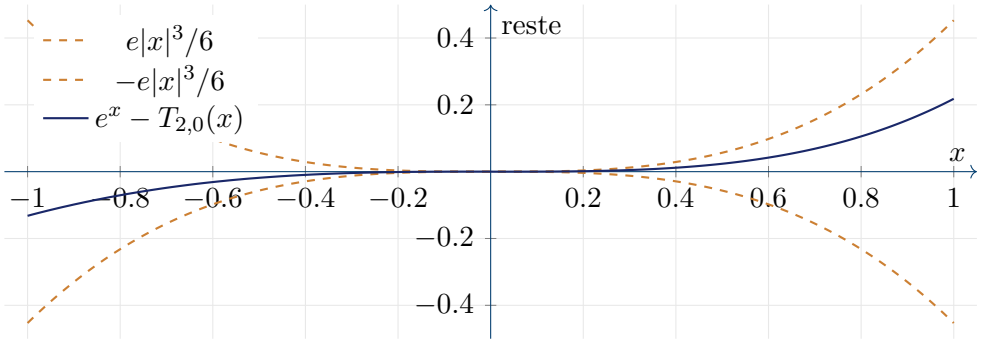


Figure 2.2 – Sur $[-1,1]$, l'erreur d'approximation de e^x à l'ordre 2 reste dans les enveloppes prévues par l'inégalité de Taylor–Lagrange.

2.3.2 Encadrements et signe du reste

Proposition 2.3.2 – Encadrement lorsque $x > a$
Si $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$ entre a et $x > a$, alors

$$\frac{m(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_{n,a}(x) \leq \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $x < a$, on tient compte du signe de $(x-a)^{n+1}$; une multiplication par un nombre négatif inverse les inégalités.

Exemple 6 – L'exponentielle au-dessus de ses polynômes en 0
Pour $x \geq 0$, les dérivées de e^x sont positives. Par Taylor–Lagrange,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Sur tout intervalle $[-r, r]$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^r \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0.$$

En effet, le quotient de deux majorants successifs tend vers 0. Cette convergence est démontrée pour l'exponentielle ; elle ne résulte pas de la seule existence de toutes les dérivées pour une fonction quelconque.

2.4 Formule de Taylor avec reste intégral

2.4.1 Énoncé et preuve

Théorème 2.4.1 – Reste intégral
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$ et $a, x \in J$, alors

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

L'intégrale est orientée : la formule reste vraie pour $x < a$.

Démonstration. Nous allons démontrer la formule de Taylor avec reste intégral en utilisant des intégrations par parties successives.

Lorsque $n = 0$, la formule à démontrer devient

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt.$$

Cette égalité découle directement du théorème fondamental de l'analyse, puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Supposons maintenant $n \geq 1$ et posons

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Effectuons une intégration par parties par rapport à la variable t, en considérant x comme une constante.

Choisissons

$$u(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}, \qquad v'(t) = f^{(n+1)}(t).$$

On obtient alors

$$u'(t) = -\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

et nous pouvons prendre

$$v(t) = f^{(n)}(t).$$

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left[\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right]_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt, \\ &= -\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

La dernière intégrale étant exactement $I_{n-1}(x)$, nous avons établi la relation de récurrence

$$I_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Appliquons la relation précédente aux intégrales $I_n(x), I_{n-1}(x), \ldots, I_1(x)$.

Nous avons successivement

$$\begin{aligned} I_n(x) &= I_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \\ &\vdots \\ I_1(x) &= I_0(x) - f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

En substituant successivement ces égalités, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_n(x) = I_0(x) &- f'(a)(x-a) \\ &- \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots \\ &- \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$I_0(x) = \int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a).$$

Par conséquent,

$$I_n(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Autrement dit,

$$I_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En remplaçant $I_n(x)$ par son expression intégrale et en réorganisant les termes, il vient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

C'est exactement la formule de Taylor avec reste intégral, ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 2.4.2 – Forme avec une intégrale sur $[0,1]$

Pour $h = x - a$,

$$R_{n,a}(a+h) = \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+uh)\,du.$$

Démonstration. Effectuer le changement de variable $t = a + uh$. Le facteur h^{n+1} tient compte aussi du cas $h < 0$. ■

2.4.2 Pourquoi cette forme est utile

Le reste intégral est **explicite** : il ne fait intervenir aucun point intermédiaire inconnu. Il permet des estimations et des études de signe. Si $|f^{(n+1)}| \leq M$, on retrouve

$$|R_{n,a}(a+h)| \leq \frac{M|h|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n\,du = \frac{M|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 7 – Une identité pour le logarithme

Pour $x > -1$, le reste intégral à l'ordre 1 donne

$$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}\,dt.$$

Avec la variable u sur $[0,1]$,

$$\ln(1+x) - x = -x^2\int_0^1 \frac{1-u}{(1+ux)^2}\,du \leq 0.$$

On retrouve $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, avec égalité seulement en 0.

2.5 Formule de Taylor–Young

2.5.1 Un résultat local

Théorème 2.5.1 – Taylor–Young sous une hypothèse $\mathcal{C}^n$
Soit $n \geq 1$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de a, alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n) \quad (h \to 0).$$

Pour $n = 0$, la continuité en a donne $f(a+h) = f(a) + o(1)$.

Démonstration. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$, on a

$$f(a+h) = T_{n-1,a}(a+h) + \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+uh)\, du.$$

Or, puisque

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1}\, du = \frac{1}{n},$$

on peut écrire

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a)\, du.$$

En retranchant ce terme, on fait apparaître le polynôme de Taylor d'ordre n et la différence $f^{(n)}(a+uh) - f^{(n)}(a)$.
Ainsi, le reste $r(h) = f(a+h) - T_{n,a}(a+h)$ s'écrit

$$r(h) = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \Big(f^{(n)}(a+uh) - f^{(n)}(a) \Big)\, du.$$

Par conséquent, pour $h \neq 0$,

$$\left| \frac{r(h)}{h^n} \right| \leq \frac{1}{n!} \sup_{u \in [0,1]} |f^{(n)}(a+uh) - f^{(n)}(a)|.$$

Montrons que ce supremum tend vers zéro. Par continuité de $f^{(n)}$ en a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t-a| < \delta \Longrightarrow |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| < \varepsilon.$$

Or, pour tout $u \in [0,1]$, on a

$$|(a+uh) - a| = u|h| \leq |h|.$$

Ainsi, dès que $|h| < \delta$, on obtient

$$|f^{(n)}(a+uh) - f^{(n)}(a)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in [0,1].$$

La convergence vers zéro est donc uniforme par rapport à u. Il en résulte que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

D'où

$$r(h) = o(h^n).$$

■

Remarque – Ce que dit et ne dit pas le petit o

Taylor–Young donne la taille asymptotique de l'erreur, mais pas nécessairement une constante numérique ni un intervalle précis. Pour une erreur chiffrée, on privilégie Lagrange ou le reste intégral. Le calcul systématique avec les parties polynomiales sera étudié au chapitre III.

Exemple 8 – Exploiter directement la formule

Appliquée à e^x en 0 à l'ordre 2, Taylor–Young donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc $\frac{e^x-1-x}{x^2} \to 1/2$. On pouvait aussi utiliser Lagrange : $e^x - 1 - x = e^c \frac{x^2}{2}$, où c est entre 0 et x, donc $c \to 0$.

2.5.2 Comparer les trois formules

	Lagrange	**Reste intégral**	**Young**
Hypothèse utilisée	$\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment	$\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment	$\mathcal{C}^n$ près du centre
Reste	Dérivée en un point c inconnu	Intégrale explicite	$o(h^n)$
Nature	Égalité exacte	Égalité exacte	Information locale
Usage principal	Erreur numérique, signe	Estimation, signe, démonstrations	Comportement au voisinage du centre

Attention – Ordre de la dérivée et ordre du polynôme

Un polynôme de Taylor d'ordre n utilise les dérivées jusqu'à n. Le reste de Lagrange correspondant utilise la dérivée d'ordre $n+1$. Dans Taylor–Young à l'ordre n, le reste est $o(h^n)$, et non automatiquement $O(h^{n+1})$.

2.6 Applications locales : signe et extrema

2.6.1 Premier terme non nul

Théorème 2.6.1 – Premier ordre non nul

Soit $f \in \mathcal{C}^p$ au voisinage de a, avec $p \geq 1$. Si $f'(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$, alors

$$f(a+h) - f(a) \sim \frac{f^{(p)}(a)}{p!} h^p.$$

Si p est pair, f admet un minimum local strict en a pour $f^{(p)}(a) > 0$, et un maximum local strict pour $f^{(p)}(a) < 0$. Si p est impair et a est intérieur au domaine, a n'est pas un extremum local.

Démonstration. Taylor–Young fait disparaître les termes d'ordre inférieur à p. Le quotient par $\frac{f^{(p)}(a)h^p}{p!}$ tend vers 1 ; la différence a donc le signe de ce terme près de a. Une puissance paire garde son signe ; une puissance impaire change de signe. ■

Exemple 9 – Un critère au-delà de la dérivée seconde

Pour $f(x) = x^4$, les trois premières dérivées en 0 sont nulles et $f^{(4)}(0) = 24 > 0$: 0 est un minimum strict. Pour $g(x) = x^3$, le premier ordre non nul est impair : g prend des valeurs positives et négatives arbitrairement près de 0.

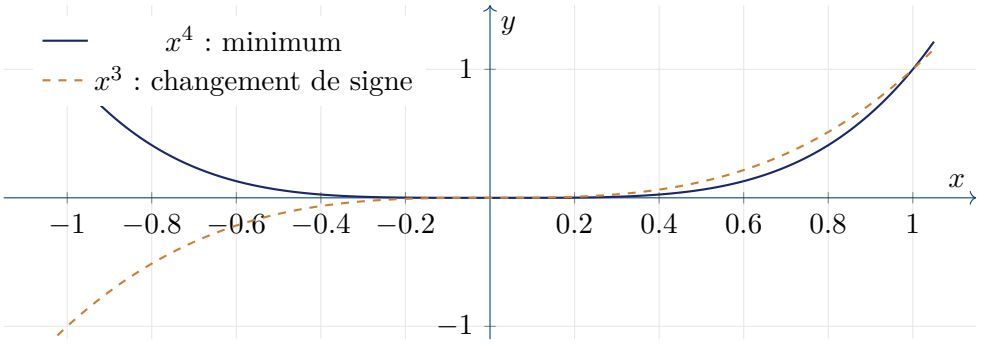


Figure 2.3 – La parité du premier ordre non nul détermine le comportement par rapport au niveau $f(a)$.

2.6.2 Position par rapport à la tangente

Si $f \in \mathcal{C}^2$ près de a et $f''(a) \neq 0$, alors

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h \sim \frac{f''(a)}{2}h^2.$$

La courbe est donc localement au-dessus de sa tangente si $f''(a) > 0$, et au-dessous si $f''(a) < 0$. Si $f''(a) = 0$, le critère ne conclut pas : il faut examiner un ordre supérieur ou revenir à la différence exacte.

Attention – Un cas où le critère ne s'applique pas

Si toutes les dérivées examinées s'annulent, on ne conclut pas à l'absence d'extremum. Le théorème exige l'existence d'un premier ordre non nul ; il ne couvre pas toutes les fonctions possibles.

Bibliographie

[1] J.-M. Monier, *Analyse MPSI*, Dunod, Paris.
[2] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, Paris.
[3] F. Liret et D. Martinais, *Analyse, 1re année : Cours et exercices avec solutions*, Dunod, Paris.