UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Analyse III

CHAPITRE III

Développements limités

Existence, unicité, opérations, limites et applications locales

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Table des matières

Notations et abréviations **ii**

3 Développements limités **1**
3.1 Définition, existence et unicité . . . 1
3.1.1 La partie régulière et le reste . . . 1
3.1.2 Unicité, troncature et premier terme . . . 2
3.1.3 Existence et lien avec la dérivation . . . 5
3.2 Développements usuels et parité . . . 7
3.2.1 Formules fondamentales en zéro . . . 7
3.2.2 Parité et simplification . . . 8
3.3 Somme, produit et choix de l'ordre . . . 8
3.3.1 Addition et multiplication . . . 8
3.3.2 Économiser les termes sans perdre la précision . . . 9
3.4 Inverse et quotient . . . 9
3.4.1 Dénominateur non nul au centre . . . 9
3.4.2 Dénominateur qui s'annule . . . 10
3.5 Composition de développements . . . 12
3.5.1 Principe de substitution . . . 12
3.5.2 Adapter l'ordre à la substitution . . . 12
3.6 Intégration, dérivation et fonctions réciproques . . . 13
3.6.1 Intégrer un DL . . . 13
3.6.2 Pourquoi la dérivation est différente . . . 13
3.6.3 Calculer le DL d'une fonction réciproque . . . 14
3.7 Applications aux limites . . . 16
3.7.1 Compensations et choix de précision . . . 16
3.7.2 Puissances variables . . . 16
3.8 Applications géométriques et à l'infini . . . 17
3.8.1 Tangente et position locale . . . 17
3.8.2 Changer de variable à l'infini . . . 17

Notations et abréviations

Notation	Signification
$a,\ h = x - a$	Point de référence ; variable recentrée.
$n,\ p,\ q$	Entiers indiquant l'ordre ou le degré d'un premier terme non nul.
DL_n	Développement limité à l'ordre n.
$P_n(h)$	Partie régulière du DL, de degré au plus n.
$r(h) = o(h^n)$	Reste négligeable devant h^n.
$f \sim g$	Équivalence au point étudié, précisé dans le texte.
$\mathcal{C}^n$	Fonctions possédant n dérivées continues.
α	Paramètre réel fixé dans une puissance $(1+h)^\alpha$.
$\binom{\alpha}{k}$	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$, avec $\binom{\alpha}{0} = 1$.
$[P]_{\leq n}$	Polynôme obtenu en supprimant les termes de degré supérieur à n.
$u(h)$	Petite quantité utilisée dans une composition.
$t = 1/x$	Changement de variable pour une étude à l'infini.
TY	Formule de Taylor–Young, étudiée au chapitre II.

Chapitre 3

Développements limités

3.1 Définition, existence et unicité

3.1.1 La partie régulière et le reste

Définition 3.1.1 – Développement limité d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** s'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que, en posant $h = x - a$,

$$f(a+h) = P_n(h) + o(h^n) \quad (h \to 0).$$

On écrit $P_n(h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n$. Le polynôme est la **partie régulière** et le terme $o(h^n)$ le **reste**.

L'ordre n porte sur la précision du reste ; le degré du polynôme peut être strictement inférieur à n. Par exemple, $\sin h = h - h^3/6 + o(h^4)$ est un DL d'ordre 4 dont la partie régulière est de degré 3.

Le comportement est étudié sur un voisinage épointé : la valeur isolée $f(a)$ n'est pas fixée par le DL. Le coefficient c_0 est la limite en a ; il vaut $f(a)$ si f est continue en a. Dans les applications usuelles, on travaille avec la fonction continue ou son prolongement continu.

Exemple 1 – Lire correctement un reste

L'égalité $f(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$ en 0 signifie

$$\frac{f(x) - (2 - 3x + x^2)}{x^2} \longrightarrow 0.$$

Elle donne $\lim f = 2$ et une approximation à l'ordre 2. Elle n'affirme pas que f est exactement égale au polynôme.

3.1.2 Unicité, troncature et premier terme

Théorème 3.1.2 – Unicité
La partie régulière d'un développement limité d'ordre n en un point a est unique.

Démonstration. Supposons que f admette deux développements limités d'ordre n en a, de parties régulières P et R. On peut alors écrire, pour h voisin de 0,

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \quad \text{et} \quad f(a+h) = R(h) + o(h^n),$$

où P et R sont des polynômes de degré au plus n.

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$Q(h) := P(h) - R(h) = o(h^n).$$

Montrons que Q est nécessairement le polynôme nul.

Raisonnons par l'absurde et supposons $Q \neq 0$. Soit p le plus petit indice dont le coefficient b_p de Q est non nul. On peut alors factoriser :

$$Q(h) = b_p h^p + b_{p+1}h^{p+1} + \cdots + b_n h^n = h^p\Big(b_p + b_{p+1}h + \cdots + b_n h^{n-p}\Big).$$

En divisant par h^p, pour $h \neq 0$, puis en faisant tendre h vers 0, il vient

$$\lim_{h\to 0} \frac{Q(h)}{h^p} = b_p \neq 0.$$

D'autre part, puisque $Q(h) = o(h^n)$, il existe une fonction $\varepsilon(h) \to 0$ telle que

$$Q(h) = h^n \varepsilon(h).$$

Ainsi, comme $p \leq n$,

$$\frac{Q(h)}{h^p} = h^{n-p}\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Nous obtenons donc deux limites différentes pour une même expression, ce qui est impossible.

Par conséquent, $Q = 0$, c'est-à-dire $P = R$. La partie régulière du DL est donc unique. ■

Proposition 3.1.3 – Troncature
Si f admet un développement limité d'ordre n en a, alors, pour tout entier m tel que $0 \leq m < n$, on a

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_m h^m + o(h^m).$$

Démonstration. Puisque f admet un DL d'ordre n en a, il existe des coefficients $c_0, \ldots, c_n$ tels que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + o(h^n).$$

Séparons les termes de degré inférieur ou égal à m de ceux de degré supérieur :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{m} c_k h^k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} c_k h^k + o(h^n)}_{r(h)}.$$

Montrons que le reste $r(h)$ est un $o(h^m)$.
Pour tout $k > m$, on a

$$\frac{h^k}{h^m} = h^{k-m} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

car $k - m > 0$. Ainsi, $h^k = o(h^m)$.
De même, puisque $n > m$, on a

$$\frac{o(h^n)}{h^m} = h^{n-m}\varepsilon(h) \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon(h) \longrightarrow 0.$$

Donc $o(h^n) = o(h^m)$.
Par conséquent, le reste $r(h)$, étant une somme finie de termes négligeables devant h^m, vérifie

$$r(h) = o(h^m).$$

Nous obtenons finalement

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{m} c_k h^k + o(h^m).$$

Ce qui démontre la propriété de troncature. ■

Proposition 3.1.4 – Extraire un équivalent

Supposons que f admette un développement limité d'ordre n en a. Si c_p est le premier coefficient non nul, alors

$$\boxed{f(a+h) \sim c_p h^p \quad (h \to 0).}$$

Si tous les coefficients du DL sont nuls, on sait seulement que $f(a+h) = o(h^n)$; ce DL ne permet pas d'obtenir un équivalent non nul.

Démonstration. Puisque f admet un DL d'ordre n en a, on peut écrire

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o(h^n).$$

Soit p le plus petit indice tel que $c_p \neq 0$. Ainsi, $c_0 = \cdots = c_{p-1} = 0$, et donc

$$f(a+h) = c_p h^p + c_{p+1} h^{p+1} + \cdots + c_n h^n + o(h^n).$$

Pour montrer que $f(a+h) \sim c_p h^p$, il suffit de vérifier que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{c_p h^p} = 1.$$

En divisant par $c_p h^p$, pour $h \neq 0$, on obtient

$$\frac{f(a+h)}{c_p h^p} = 1 + \frac{c_{p+1}}{c_p} h + \cdots + \frac{c_n}{c_p} h^{n-p} + \frac{o(h^n)}{c_p h^p}.$$

Or, pour tout $k > p$, on a

$$h^{k-p} \longrightarrow 0 \qquad (h \to 0).$$

De plus, comme $p \leq n$, on peut écrire

$$\frac{o(h^n)}{h^p} = h^{n-p}\varepsilon(h) \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon(h) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, tous les termes autres que 1 tendent vers zéro. Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{c_p h^p} = 1.$$

On en déduit que

$$f(a+h) \sim c_p h^p.$$

Enfin, si tous les coefficients du DL sont nuls, on obtient uniquement $f(a+h) = o(h^n)$. Aucun terme non nul ne peut alors être extrait de ce DL pour fournir un équivalent. ■

Exemple 2 – Extraction d'un équivalent

Considérons la fonction

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

Au voisinage de 0, le développement limité de e^x à l'ordre 3 est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Le premier terme non nul est $\dfrac{x^2}{2}$. Les termes suivants étant négligeables devant x^2, on obtient

$$e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2} \qquad (x \to 0).$$

Remarque – Cas d'un développement limité nul

Lorsque tous les coefficients d'un DL d'ordre n sont nuls, on obtient seulement

$$f(a+h) = o(h^n).$$

Cette information ne permet pas de déterminer un équivalent non nul de f.
En effet, considérons les fonctions

$$f(x) = x^4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^5.$$

Au voisinage de 0, elles possèdent toutes les deux le même DL d'ordre 3 :

$$f(x) = 0 + o(x^3), \qquad g(x) = 0 + o(x^3).$$

Pourtant, leurs équivalents sont différents :

$$f(x) \sim x^4, \qquad g(x) \sim x^5.$$

Ainsi, un DL nul à l'ordre n ne signifie pas que la fonction est identiquement nulle. Il indique simplement que la fonction est négligeable devant h^n.
En pratique : pour rechercher un équivalent, on peut calculer un DL à un ordre supérieur, jusqu'à faire apparaître un premier coefficient non nul.

3.1.3 Existence et lien avec la dérivation

Théorème 3.1.5 – Existence par Taylor–Young

Si $f \in \mathcal{C}^n$ près de a, alors elle admet le DL

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Cette condition est suffisante ; elle n'est pas nécessaire.

Démonstration. C'est la formule de Taylor–Young démontrée au chapitre II. ■

Exemple 3 – Un DL sans régularité $\mathcal{C}^1$

Posons $f(x) = x^3 \sin(1/x^2)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Comme $|f(x)| \leq |x|^3$, on a $f(x) = o(x^2)$: le DL d'ordre 2 est nul. Pourtant

$$f'(x) = 3x^2 \sin(1/x^2) - 2\cos(1/x^2) \quad (x \neq 0)$$

n'a pas de limite en 0, alors que $f'(0) = 0$. La fonction n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ près de 0.

Proposition 3.1.6 – Le cas particulier de l'ordre un

Si f est continue en a, elle admet un DL d'ordre 1 en a si et seulement si elle y est dérivable. Dans ce cas,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Démonstration. Par définition de la dérivabilité, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Cela signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon(h)$, tendant vers 0 lorsque $h \to 0$, telle que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h).$$

En multipliant par h, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h).$$

Or, puisque $\varepsilon(h) \to 0$, on a $h\varepsilon(h) = o(h)$. Ainsi,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Donc f admet un DL d'ordre 1 en a.

Réciproquement, Il existe alors deux réels c_0, c_1 tels que

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + o(h).$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = c_0.$$

Comme f est continue en a, cette limite est égale à $f(a)$. Par conséquent,

$$c_0 = f(a).$$

Le développement limité devient donc

$$f(a+h) = f(a) + c_1 h + o(h).$$

En soustrayant $f(a)$, puis en divisant par $h \neq 0$, il vient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c_1 + \frac{o(h)}{h} = c_1 + o(1).$$

Puisque $o(1) \to 0$ lorsque $h \to 0$, on en déduit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c_1.$$

Cette limite existe : f est donc dérivable en a, et

$$f'(a) = c_1.$$

Ainsi, pour une fonction continue en a, l'existence d'un DL d'ordre 1 équivaut à la dérivabilité en a. ■

Remarque – Interprétation du DL d'ordre 1

Le développement limité

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

exprime une approximation affine de f au voisinage de a.
Le terme $f(a) + f'(a)h$ représente la valeur donnée par la tangente à la courbe au point d'abscisse a, tandis que le reste $o(h)$ est négligeable devant h.
En particulier, le coefficient du terme de degré 1 est exactement la dérivée de f au point a.

3.2 Développements usuels et parité

3.2.1 Formules fondamentales en zéro

Dans toutes les formules suivantes, $x \to 0$, $n \geq 0$ est fixé et $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé.

Exponentielle et fonctions trigonométriques

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

À un ordre quelconque, on conserve les termes de la bonne parité dont le degré est au plus l'ordre demandé.

Logarithme, fraction géométrique et puissances

Pour $n \geq 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n).$$

Pour les puissances réelles et le logarithme, on se place dans $1 + x > 0$.

Justification. Ces formules se déduisent de Taylor–Young et des dérivées des fonctions concernées. Pour la fraction géométrique, on peut aussi utiliser l'identité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

dont le dernier terme est $o(x^n)$ en 0. ■

Exemple 4 – Deux puissances utiles

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3).$$

3.2.2 Parité et simplification

Proposition 3.2.1 – Parité de la partie régulière

Pour un DL bilatéral en 0, si f est paire, sa partie régulière ne contient que des puissances paires. Si f est impaire, elle ne contient que des puissances impaires.

Démonstration. Remplacer x par $-x$ dans le DL et utiliser $f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = -f(x)$. L'unicité impose l'annulation des coefficients de parité opposée. ■

Attention – Parité et ordre du reste

La parité ne permet pas à elle seule de gagner un ordre de précision. Par exemple, $|x|^{5/2}$ est paire et $o(x^2)$, mais n'est pas $o(x^3)$. Pour écrire un reste d'ordre supérieur, il faut disposer d'une justification supplémentaire, par exemple une régularité suffisante.

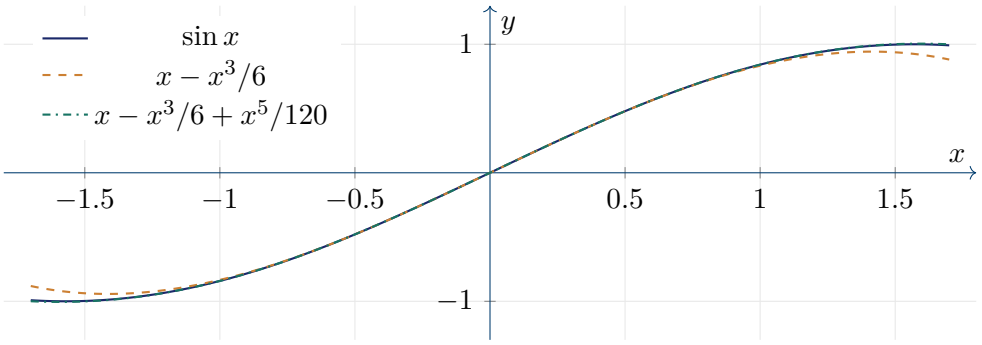


Figure 3.1 – La fonction sinus et ses parties régulières impaires. La comparaison est locale autour de 0.

3.3 Somme, produit et choix de l'ordre

3.3.1 Addition et multiplication

Proposition 3.3.1 – Somme et produit de deux DL

Si $f = P_n + o(x^n)$ et $g = Q_n + o(x^n)$ en 0, alors

$$f + g = P_n + Q_n + o(x^n), \qquad fg = [P_n Q_n]_{\leq n} + o(x^n).$$

On peut multiplier par une constante et soustraire des DL de la même manière.

Démonstration. Les polynômes sont bornés près de 0. Le produit d'un reste $o(x^n)$ par une fonction bornée est $o(x^n)$. Les monômes de degré supérieur à n sont également $o(x^n)$. ■

Exemple 5 – Produit à l'ordre trois

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Le coefficient de x^3 est $1/3 - 1/2 + 1/2 = 1/3$.

3.3.2 Économiser les termes sans perdre la précision

Méthode – Prendre en compte un facteur qui s'annule

Pour obtenir $x^p f(x)$ à l'ordre n, avec $n \geq p$, il suffit de connaître f à l'ordre $n-p$:

$$x^p\, o(x^{n-p}) = o(x^n).$$

Dans un produit de deux fonctions qui s'annulent, les ordres nécessaires peuvent donc être différents.

Exemple 6 – Un calcul court

Pour obtenir $x^2 \ln(1+x)$ à l'ordre 4, on utilise seulement $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$:

$$x^2 \ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Attention – Une compensation peut imposer un ordre supérieur

Pour étudier $e^x - 1 - x - x^2/2$, il faut au moins le terme de degré 3. Un DL d'ordre 2 ne donnerait que $o(x^2)$, ce qui ne permet pas de calculer le quotient par x^3.

3.4 Inverse et quotient

3.4.1 Dénominateur non nul au centre

Théorème 3.4.1 – Inverse d'un DL

Si $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$ avec $b_0 \neq 0$, alors $1/g$ admet un DL d'ordre n. Pour le calculer, écrire $g = b_0(1+u)$, où $u \to 0$, puis

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{b_0}\Big(1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^n u^n\Big) + o(x^n).$$

Ici $u = O(x)$ pour $n \geq 1$; on tronque les puissances à l'ordre n.

Démonstration. Comme $u = O(x)$, le reste $u^{n+1}/(1+u)$ est $O(x^{n+1}) = o(x^n)$. Les règles de produit permettent de remplacer u par sa partie régulière à l'ordre demandé. Le cas $n = 0$ suit de la continuité de l'inverse en b_0. ■

Exemple 7 – Inverse à l'ordre deux

Pour $g(x) = 1 + x + x^2$, poser $u = x + x^2$:

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 + o(x^2) = 1 - x + o(x^2).$$

Le coefficient de x^2 est nul.

On peut aussi chercher des coefficients c_k tels que $g(x)(c_0 + \cdots + c_n x^n) = 1 + o(x^n)$, puis identifier les puissances.

3.4.2 Dénominateur qui s'annule

Méthode – Factoriser avant de diviser

Lorsqu'on cherche le DL d'un quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et que f et g s'annulent en 0, on ne peut pas inverser directement le DL de g, car son terme constant est nul.
La méthode consiste à factoriser les plus petites puissances de x dans les deux DL.
Supposons que

$$f(x) = x^p\Big(A(x) + o(x^m)\Big), \qquad g(x) = x^q\Big(B(x) + o(x^m)\Big),$$

où A et B sont des polynômes et $B(0) \neq 0$.
Pour $x \neq 0$ suffisamment proche de 0, on obtient

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p-q}\frac{A(x) + o(x^m)}{B(x) + o(x^m)}.$$

Le dénominateur de la nouvelle fraction possède maintenant un terme constant non nul. On peut donc calculer son inverse à l'aide des DL usuels, puis effectuer le produit.

Attention à l'ordre du DL.
La division par une puissance x^q fait perdre q ordres de précision. En effet, si $r(x) = o(x^N)$, alors

$$\frac{r(x)}{x^q} = x^{N-q}\varepsilon(x), \qquad \varepsilon(x) \longrightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\frac{o(x^N)}{x^q} = o(x^{N-q}).$$

Par conséquent, pour obtenir un quotient à l'ordre m, il faut généralement calculer les DL initiaux jusqu'à l'ordre $m + q$.

Exemple 8 – Quotient avec deux zéros simples

Déterminons le DL à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}.$$

Puisque le numérateur et le dénominateur s'annulent à l'ordre 1, nous utilisons leurs DL à l'ordre 3 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

En mettant x en facteur, on obtient

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right),$$

et

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right).$$

En simplifiant par x, pour $x \neq 0$, il vient

$$f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}.$$

Le dénominateur possède maintenant un terme constant égal à 1.
Rappelons le DL usuel

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2).$$

En posant

$$u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2),$$

on a

$$u^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Par substitution, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+u} &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^2}{4} + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).\end{aligned}$$

Il reste à multiplier les deux expressions :

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right)x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\sin x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

En particulier,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = 1.$$

Le quotient admet donc un prolongement par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.

Remarque – Pourquoi développer à l'ordre 3 ?

Dans cet exemple, le numérateur et le dénominateur s'annulent tous deux à l'ordre 1. Après factorisation et simplification par x, les restes d'ordre 3 deviennent des restes d'ordre 2 :

$$\frac{o(x^3)}{x} = o(x^2).$$

Ainsi, pour déterminer le quotient à l'ordre 2, il était nécessaire de connaître les DL initiaux à l'ordre 3.

Règle pratique : si le dénominateur s'annule à l'ordre q, on calcule en général les DL du numérateur et du dénominateur jusqu'à l'ordre $m+q$ pour obtenir le quotient à l'ordre m, après simplification.

3.5 Composition de développements

3.5.1 Principe de substitution

Proposition 3.5.1 – Composition lorsque la petite quantité est $O(x)$
Supposons que $u(x) \to 0$, $u(x) = O(x)$ et que F admet un DL d'ordre n en 0. Alors

$$F(u(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, u(x)^k + o(x^n),$$

sous réserve que les expressions soient définies ; si u atteint 0, on utilise le prolongement continu de F en 0. Si u possède elle-même un DL d'ordre n, on substitue sa partie régulière et on conserve les puissances de degré au plus n.

Démonstration. Le reste extérieur s'écrit $r(t) = t^n\eta(t)$, avec $\eta(t) \to 0$. Alors $r(u(x)) = u(x)^n\eta(u(x)) = o(x^n)$ puisque $u = O(x)$. La substitution dans chaque puissance utilise les règles de produit. ■

Exemple 9 – Logarithme composé
Avec $u = x + x^2$, on a

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(x^3)\\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

En effet, $u^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$.

3.5.2 Adapter l'ordre à la substitution

Si $u(x)$ est de l'ordre de x^p, on n'a pas besoin de tous les termes du DL extérieur à l'ordre final en x.

Exemple 10 – Substitution quadratique
À l'ordre 4,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Il suffit du DL d'ordre 2 de e^u : son reste $o(u^2)$ devient $o(x^4)$. De même,

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Attention – Une substitution peut aussi faire perdre des ordres
Si $u = \sqrt{x}$ et $x \to 0^+$, alors $o(u^2) = o(x)$. Un DL extérieur à l'ordre 2 ne donne donc pas automatiquement un DL à l'ordre 2 en x. Il faut suivre la puissance du reste.

3.6 Intégration, dérivation et fonctions réciproques

3.6.1 Intégrer un DL

Théorème 3.6.1 – Intégration terme à terme
Supposons f continue près de 0 et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Pour $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt$,

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. Écrire le reste $r(t)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|r(t)| \leq \varepsilon |t|^n$ assez près de 0. Ainsi, pour x suffisamment petit, de signe quelconque,

$$\left| \int_0^x r(t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} |x|^{n+1}.$$

L'intégrale du reste est donc $o(x^{n+1})$. ■

Exemple 11 – Retrouver le DL de l'arctangente
Comme $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ et $\arctan 0 = 0$, on obtient

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

3.6.2 Pourquoi la dérivation est différente

Attention – Un reste ne se dérive pas formellement
La relation $r = o(x^n)$ n'implique pas $r' = o(x^{n-1})$. Par exemple, $r(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) = o(x^2)$, mais $r'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 2\cos(\frac{1}{x^2})$ n'est pas $o(x)$.

Proposition 3.6.2 – Un cadre où la dérivation est permise
Si $f \in \mathcal{C}^n$ près de 0, avec $n \geq 1$, alors on peut obtenir le DL d'ordre $n-1$ de f' en dérivant la partie régulière du DL d'ordre n de f.

Démonstration. Puisque $f \in \mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, la formule de Taylor–Young à l'ordre n donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

On ne peut pas dériver directement cette égalité, car la dérivée d'un reste $o(x^n)$ n'est pas nécessairement un $o(x^{n-1})$.

Cependant, puisque $f \in \mathcal{C}^n$, sa dérivée f' appartient à $\mathcal{C}^{n-1}$. Nous pouvons donc appliquer directement la formule de Taylor–Young à f', à l'ordre $n-1$:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}).$$

Or, pour tout $0 \leq k \leq n-1$,

$$(f')^{(k)}(0) = f^{(k+1)}(0).$$

Ainsi,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}).$$

Cette somme est exactement la dérivée du polynôme de Taylor de f à l'ordre n.

Par conséquent, le DL de f' à l'ordre $n-1$ s'obtient en dérivant la partie régulière du DL de f à l'ordre n.

Cette propriété résulte de la régularité de f, et non d'une dérivation formelle du reste $o(x^n)$. ■

3.6.3 Calculer le DL d'une fonction réciproque

Proposition 3.6.3 – Développement limité d'une fonction réciproque

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \geq 1$, au voisinage d'un point a, telle que $f'(a) \neq 0$. Alors f admet une fonction réciproque locale $g = f^{-1}$, de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $b = f(a)$.

Le développement limité de g à l'ordre n peut être déterminé en écrivant

$$g(b+h) = a + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$$

et en identifiant les coefficients dans l'identité

$$f(g(b+h)) = b + h.$$

En particulier, le coefficient du premier degré est

$$c_1 = g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Puisque $f'(a) \neq 0$ et f' est continue, f' garde un signe constant au voisinage de a. D'après le théorème des accroissements finis, f est donc strictement monotone sur un intervalle J contenant a. Comme f est continue, elle réalise une bijection de J sur $f(J)$ et admet une réciproque continue $g = f^{-1}$.

De plus, la formule de dérivation d'une fonction réciproque donne

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Puisque $f \in \mathcal{C}^n$ et que f' ne s'annule pas sur J, cette relation, dérivée successivement, montre que g est également de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $b = f(a)$.

D'après la formule de Taylor–Young, g admet un développement limité d'ordre n :

$$g(b+h) = a + \sum_{k=1}^{n} c_k h^k + o(h^n).$$

Or, par définition de la fonction réciproque,

$$f(g(b+h)) = b + h.$$

En remplaçant $g(b+h)$ par son DL, puis en utilisant le DL de f au voisinage de a, on identifie les coefficients des mêmes puissances de h.

Cette identification détermine successivement les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

En particulier, au premier ordre,

$$f(a + c_1 h + o(h)) = f(a) + f'(a)c_1 h + o(h).$$

En comparant avec $b + h$, et puisque $f(a) = b$, on obtient

$$f'(a)c_1 = 1, \qquad c_1 = \frac{1}{f'(a)}.$$

Les coefficients suivants se déterminent de la même manière, par identification. ■

Exemple 12 – Réciproque locale de $x + x^2$

Considérons la fonction

$$f(x) = x + x^2.$$

On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1 \neq 0$. La fonction f admet donc une réciproque locale $g = f^{-1}$ au voisinage de 0.

Cherchons son DL à l'ordre 3 sous la forme

$$g(y) = y + ay^2 + by^3 + o(y^3).$$

Puisque $f(g(y)) = y$, nous avons

$$g(y) + g(y)^2 = y.$$

Calculons d'abord le carré :

$$g(y)^2 = y^2 + 2ay^3 + o(y^3).$$

En remplaçant dans l'identité précédente, on obtient

$$y + (a+1)y^2 + (b+2a)y^3 + o(y^3) = y.$$

Par unicité du développement limité, les coefficients des termes de degrés 2 et 3 doivent être nuls :

$$\begin{cases} a + 1 = 0, \\ b + 2a = 0. \end{cases}$$

Ainsi, $a = -1$ et $b = 2$. Par conséquent,

$$f^{-1}(y) = y - y^2 + 2y^3 + o(y^3).$$

On peut également vérifier ce résultat à partir de l'expression exacte de la réciproque locale :

$$f^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}.$$

3.7 Applications aux limites

3.7.1 Compensations et choix de précision

Méthode – Anticiper l'ordre du dénominateur

Dans un quotient, repérer le premier ordre non nul du dénominateur. Développer le numérateur assez loin pour atteindre le premier terme qui subsiste après compensation. Si les termes calculés s'annulent tous, le calcul est insuffisant : il faut augmenter l'ordre.

Exemple 13 – Une limite à l'ordre trois

$$\frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{\sin^3 x} = \frac{x^3/6 + o(x^3)}{x^3(1 + o(1))} \longrightarrow \frac{1}{6}.$$

Le DL d'ordre 2 du numérateur n'aurait pas suffi.

Exemple 14 – Différence de deux fonctions équivalentes

$$\ln(1+x) - \sin x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Les équivalents $\ln(1+x) \sim x$ et $\sin x \sim x$ se compensent ; le DL conserve les termes nécessaires.

3.7.2 Puissances variables

Exemple 15 – Le logarithme fait apparaître le bon ordre

Soit $F(x) = (\frac{e^x-1}{x})^{\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ proche de 0. La base est positive et

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Avec $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$,

$$\begin{aligned}\ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + o(x^2),\\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2).\end{aligned}$$

Donc $\ln F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{24} + o(x)$ et $F(x) \to e^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 16 – Une approximation plus précise que la limite

En 0,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Ainsi

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2)\right).$$

Le coefficient $\frac{11}{24}$ vient de $\frac{1}{3} + \frac{1}{8}$ après composition avec l'exponentielle.

3.8 Applications géométriques et à l'infini

3.8.1 Tangente et position locale

Si f est continue en a et

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_p h^p + o(h^p), \quad p \geq 2,\ c_p \neq 0,$$

alors la tangente est $y = c_0 + c_1(x-a)$. La différence à la tangente a le signe de $c_p h^p$: si p est pair, la courbe reste du même côté ; si p est impair, elle traverse sa tangente.

Exemple 17 – Position de la courbe du logarithme

En 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. La tangente est $y = x$ et la courbe est localement au-dessous. Cette conclusion correspond aussi à l'inégalité globale $\ln(1+x) \leq x$ sur $]-1, +\infty[$.

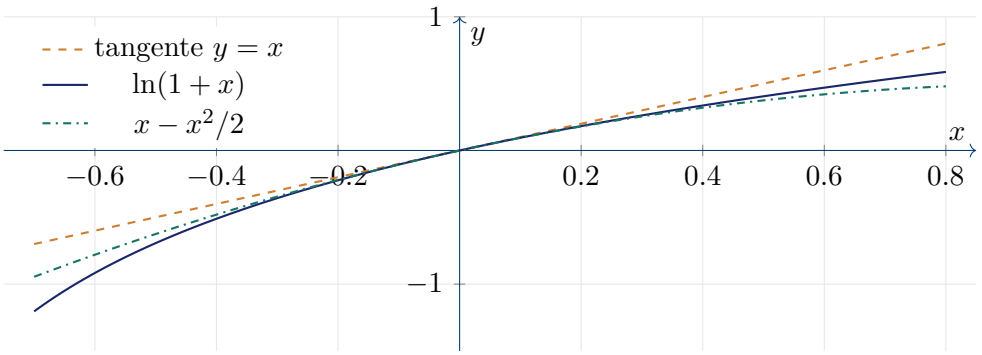


Figure 3.2 – Le terme $-\frac{x^2}{2}$ explique la position de la courbe par rapport à sa tangente.

3.8.2 Changer de variable à l'infini

À $+\infty$, poser $t = 1/x \to 0^+$. On obtient une expansion en puissances de $1/x$; on parle alors de développement asymptotique à l'infini.

Exemple 18 – Asymptote et position

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1} &= x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(1/x).\end{aligned}$$

La droite $y = x + 1/2$ est une asymptote lorsque $x \to +\infty$. Le terme $3/(8x) > 0$ montre que la courbe est au-dessus pour x suffisamment grand.

Attention – Le signe de la racine

À $-\infty$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. On ne doit pas remplacer $\sqrt{x^2+x+1}$ par $x\sqrt{1+1/x+1/x^2}$ sur cette branche. La bonne factorisation utilise $|x|$.

Bibliographie

[1] J.-M. Monier, *Analyse MPSI*, Dunod, Paris.
[2] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, Paris.
[3] F. Liret et D. Martinais, *Analyse, 1re année : Cours et exercices avec solutions*, Dunod, Paris.