TRAVAUX DIRIGÉS / SÉRIE 1

Comparaison locale des fonctions

Voisinages, notations de Landau, équivalents et convexité

Énoncés

Consigne. Justifier les réponses et préciser les hypothèses des résultats utilisés.

Exercice 1 – Voisinages et points d'accumulation

Revenir aux quantificateurs

1. Parmi $[-1,2]$, $[0,1[$ et $]-1,1[\setminus\{0\}$, lesquels sont des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$? Lesquels contiennent un voisinage épointé de 0 ?

2. Soit $D=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^*\}$. Montrer que 0 est un point d'accumulation de D et que chaque point $\frac{1}{n}$ est isolé. Déterminer tous les points d'accumulation de D.

3. Pour $V_n=]\frac{-1}{n},\frac{1}{n}[$, calculer $\bigcap_{n\geq 1} V_n$. Comparer avec une intersection finie de voisinages.

Exercice 2 – Négligeabilité, domination et oscillations

Comparer par des quotients ou par des majorations

1. Pour chaque couple, décider si $f=o(g)$, si $f=O(g)$ et si $f\sim g$:

	$f(x)$	$g(x)$	Approche
a	x^3	x^2	$x\to 0$
b	$x^2\sin(\frac{1}{x})$	x^2	$x\to 0$
c	$3x^2-x^3$	x^2	$x\to 0$
d	$\ln x$	$\sqrt{x}$	$x\to+\infty$

2. Si $f=o(g)$ et $g=O(h)$ au même point, démontrer que $f=o(h)$.

3. Déterminer les $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $x^\alpha=o(x^2)$ en 0^+, puis en $+\infty$.

Exercice 3 – Équivalents usuels et opérations interdites

Calculs sans développements limités

1. Trouver un équivalent simple en 0 de

$$A(x)=\frac{\ln(1+3x^2)}{\sqrt{1+2x}-1},\quad B(x)=\frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)},\quad C(x)=\mathrm{e}^{\sin x}-1.$$

2. Trouver un équivalent de $\sqrt{x^2+x}-x$ en $+\infty$, puis de $\ln x-\ln 2$ en 2.

3. Avec $f=x+x^2$, $g=x$, $u=-x+x^2$ et $v=-x$, vérifier en 0 que $f\sim g$ et $u\sim v$. Pourquoi ne peut-on pas additionner ces équivalents ?

Exercice 4 – Échelles de comparaison

Reconnaître le terme dominant

1. Ranger $\ln x$, $(\ln x)^3$, $\sqrt{x}$, x^2, $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, e^x en une chaîne $u_1 = o(u_2), \dots, u_5 = o(u_6)$ en $+\infty$.

2. Donner un équivalent de $F(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + x^4 - (\ln x)^2$ en $+\infty$, puis de $G(x) = x + x^2|\ln x|$ en 0^+.

3. Déterminer, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite de $x^\alpha|\ln x|$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 5 – Reconnaître et construire des fonctions convexes

Dérivée seconde, composition et maximum

1. Étudier la convexité de $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \ln x$ sur leurs domaines. Déterminer les polynômes de degré impair convexes sur tout $\mathbb{R}$.

2. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ convexes, où I, J sont des intervalles. Si g est croissante, démontrer que $g \circ f$ est convexe. Appliquer à $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

3. Pour deux fonctions convexes $f, g : I \to \mathbb{R}$, montrer que $\max(f, g)$ est convexe. Étudier $\min(f, g)$ lorsque $f(x) = x$ et $g(x) = -x$.

Exercice 6 – Tangentes, cordes et inégalité de Bernoulli

Transformer la convexité en encadrements

1. Justifier, à l'aide des tangentes, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$. Préciser les cas d'égalité.

2. En utilisant la concavité de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, démontrer

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Préciser les cas d'égalité.

3. Soit $n \geq 2$ entier. Étudier la convexité de $f_n(x) = (1 + x)^n$ sur $[-1, +\infty[$, puis démontrer

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad x \geq -1.$$

Déterminer le cas d'égalité.

Exercice 7 – Jensen et comparaison des moyennes

Choisir la fonction convexe ou concave adaptée

On rappelle l'inégalité de Jensen : si f est convexe, $\lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

1. Pour $a_1, \dots, a_n > 0$, démontrer

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

2. Pour $x_1, \dots, x_n > 0$, établir

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x_i}\right) \geq 1.$$

3. Étudier la concavité de $F(x) = \ln(\ln x)$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire, pour $a, b > 1$,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \, \ln b}.$$

Dans chaque question, préciser le cas d'égalité.

Exercice 8 – Pentes des sécantes et propriétés globales

Démontrer sans supposer la dérivabilité

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tous $a < b < c$ dans I, montrer que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

2. Soit $a \in I$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{aligned}$$

est croissante.

3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local en x_0, montrer que ce minimum est global. Montrer que si f est strictement convexe, elle admet au plus un minimum global.

4. Montrer qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.
Le résultat reste-t-il vrai sur un intervalle borné ? Justifier.

Exercice 9 – Encadrement d'une intégrale par convexité

Inégalité de Hermite–Hadamard

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ une fonction convexe. Posons $m = \frac{a+b}{2}$.

1. Comparer $f(t)$ à sa tangente en m, puis intégrer sur $[a,b]$.

2. Comparer $f(t)$ à la corde joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, puis établir

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

3. Appliquer cet encadrement à $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1,2]$ pour encadrer $\ln 2$.

4. Montrer que l'égalité dans l'une des deux bornes équivaut au fait que f soit affine sur $[a,b]$.

Exercice 10 – Majorer une fonction par sa dérivée seconde

Un problème de synthèse sur la convexité

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Posons

$$M = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|, \qquad q(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x).$$

1. Justifier l'existence de M. Montrer que $g = f - q$ est convexe et que $h = f + q$ est concave.

2. Déterminer le signe de g et de h sur $[a,b]$, puis montrer

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leq \frac{M(b-a)^2}{8}.$$

3. Montrer que la constante $\frac{1}{8}$ est optimale.

4. Soit $F \in \mathcal{C}^2([a,b])$ et ℓ la fonction affine vérifiant $\ell(a) = F(a)$ et $\ell(b) = F(b)$. En déduire une majoration de $|F(x) - \ell(x)|$.