TRAVAUX DIRIGÉS / SÉRIE 1

Comparaison locale des fonctions

Voisinages, notations de Landau, équivalents et convexité

Énoncés et corrigés détaillés

Consigne. Justifier les réponses et préciser les hypothèses des résultats utilisés.

Exercice 1 – Voisinages et points d'accumulation

Revenir aux quantificateurs

1. Parmi $[-1,2]$, $[0,1[$ et $]-1,1[\setminus\{0\}$, lesquels sont des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$? Lesquels contiennent un voisinage épointé de 0 ?

2. Soit $D=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^*\}$. Montrer que 0 est un point d'accumulation de D et que chaque point $\frac{1}{n}$ est isolé. Déterminer tous les points d'accumulation de D.

3. Pour $V_n=]\frac{-1}{n},\frac{1}{n}[$, calculer $\bigcap_{n\geq 1} V_n$. Comparer avec une intersection finie de voisinages.

Corrigé détaillé

1. Voisinages. $[-1,2]$ contient $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$. L'ensemble $[0,1[$ ne contient aucun réel négatif et ne contient donc aucun voisinage, même épointé, de 0 dans $\mathbb{R}$. Enfin $]-1,1[\setminus\{0\}$ ne contient pas 0 : ce n'est pas un voisinage de 0, mais c'est un voisinage épointé. Le premier et le troisième ensemble contiennent ainsi un voisinage épointé.

2. Points d'accumulation. Posons $D=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Soit $\varepsilon>0$. Prenons

$$n=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1.$$

Alors $n>\frac{1}{\varepsilon}$, donc

$$0<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Ainsi, 0 est un point d'accumulation de D.

Pour $n\geq 2$, posons

$$\delta_n=\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}>0.$$

Alors

$$D\cap\left]\frac{1}{n}-\delta_n,\frac{1}{n}+\delta_n\right[=\left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

Pour $n=1$, on prend $\delta_1=\frac{1}{4}$.

Si $a<0$ ou $a>1$, un voisinage de a ne rencontre pas D.

Si $0<a<1$ et $a\notin D$, posons $k=E\left(\frac{1}{a}\right)$. Alors

$$k<\frac{1}{a}<k+1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{k+1}<a<\frac{1}{k}.$$

L'intervalle $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$ ne rencontre pas D.
Les points de D étant isolés, on conclut :

$$\boxed{D' = \{0\}.}$$

3. Intersection. Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \in V_n$, donc

$$\{0\} \subseteq \bigcap_{n\geq 1} V_n.$$

Soit $x \neq 0$. En choisissant

$$n = E\left(\frac{1}{|x|}\right) + 1,$$

on obtient $\frac{1}{n} < |x|$, donc $x \notin V_n$. Par conséquent,

$$\boxed{\bigcap_{n\geq 1} V_n = \{0\}.}$$

Or $\{0\}$ n'est pas un voisinage de 0, car il ne contient aucun intervalle ouvert centré en 0.
En revanche, pour $n_1, \ldots, n_p \geq 1$, en posant $N = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{p} V_{n_i} = \left]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right[,$$

qui est un voisinage de 0.

Exercice 2 – Négligeabilité, domination et oscillations

Comparer par des quotients ou par des majorations

1. Pour chaque couple, décider si $f = o(g)$, si $f = O(g)$ et si $f \sim g$:

	$f(x)$	$g(x)$	Approche
a	x^3	x^2	$x \to 0$
b	$x^2 \sin(\frac{1}{x})$	x^2	$x \to 0$
c	$3x^2 - x^3$	x^2	$x \to 0$
d	$\ln x$	$\sqrt{x}$	$x \to +\infty$

2. Si $f = o(g)$ et $g = O(h)$ au même point, démontrer que $f = o(h)$.

3. Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x^\alpha = o(x^2)$ en 0^+, puis en $+\infty$.

Corrigé détaillé

1. Comparaisons.

Cas	Quotient $\frac{f}{g}$	$f = o(g)$	$f = O(g)$	$f \sim g$
a	$x \to 0$	oui	oui	non
b	$\sin(\frac{1}{x})$, borné sans limite	non	oui	non
c	$3 - x \to 3$	non	oui	non
d	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 0$	oui	oui	non

Dans le cas b, les suites $x_n = (\frac{\pi}{2}+2n\pi)^{-1}$ et $y_n = (\frac{3\pi}{2}+2n\pi)^{-1}$ tendent vers 0 et donnent respectivement les valeurs 1 et -1 du quotient. Dans le cas c, la relation exacte utile est $3x^2 - x^3 \sim 3x^2$. Le cas d relève des croissances comparées.

2. Transmission du petit *o*. Il existe $C > 0$ tel que $|g| \leq C|h|$ localement. Pour $\varepsilon > 0$, la relation $f = o(g)$ donne, assez près du point, $|f| \leq (\frac{\varepsilon}{C})|g|$. Sur l'intersection des deux voisinages,

$$|f| \leq \frac{\varepsilon}{C}|g| \leq \varepsilon|h|.$$

C'est précisément $f = o(h)$. Cette preuve reste valable lorsque les fonctions de comparaison s'annulent.

3. Puissances. Le quotient est $x^{\alpha-2}$. Il tend vers 0 en 0^+ exactement pour $\boxed{\alpha > 2}$, et à $+\infty$ exactement pour $\boxed{\alpha < 2}$. Pour $\alpha = 2$, le quotient vaut 1.

Exercice 3 – Équivalents usuels et opérations interdites

Calculs sans développements limités

1. Trouver un équivalent simple en 0 de

$$A(x) = \frac{\ln(1+3x^2)}{\sqrt{1+2x}-1}, \quad B(x) = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)}, \quad C(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - 1.$$

2. Trouver un équivalent de $\sqrt{x^2+x} - x$ en $+\infty$, puis de $\ln x - \ln 2$ en 2.

3. Avec $f = x + x^2$, $g = x$, $u = -x + x^2$ et $v = -x$, vérifier en 0 que $f \sim g$ et $u \sim v$. Pourquoi ne peut-on pas additionner ces équivalents ?

Corrigé détaillé

1. Identifier l'argument qui tend vers zéro. Les fonctions sont définies dans un voisinage épointé suffisamment petit de 0. Les équivalents usuels donnent

$$\ln(1+3x^2) \sim 3x^2, \qquad \sqrt{1+2x} - 1 \sim x.$$

Le dénominateur est non nul pour $x \neq 0$ proche de 0, donc $\boxed{A(x) \sim 3x}$. De même,

$$1 - \cos(2x) \sim 2x^2, \quad \sin(3x) \sim 3x, \quad \boxed{B(x) \sim \frac{2}{3}x}.$$

Enfin, en posant $u = \sin x \to 0$, on a $\mathrm{e}^u - 1 \sim u$; comme $\sin x \sim x$, on conclut $\boxed{C(x) \sim x}$.

2. Changer de forme ou de centre. Pour $x > 0$, la conjugaison donne

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Une limite non nulle fournit donc l'équivalent $\boxed{\frac{1}{2}}$. En posant $h = x - 2 \to 0$,

$$\ln x - \ln 2 = \ln(1+\frac{h}{2}) \sim \frac{h}{2} = \boxed{\frac{x-2}{2}}.$$

3. Une compensation détruit l'information. On a $\frac{f}{g} = 1 + x \to 1$ et $\frac{u}{v} = 1 - x \to 1$, mais

$$f + u = 2x^2, \qquad g + v = 0.$$

La relation $2x^2 \sim 0$ est fausse : les termes principaux se compensent, et il faut conserver le terme suivant. La somme de deux équivalents ne se traite donc pas sans condition supplémentaire.

Exercice 4 – Échelles de comparaison

Reconnaître le terme dominant

1. Ranger $\ln x$, $(\ln x)^3$, $\sqrt{x}$, x^2, $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, e^x en une chaîne $u_1 = o(u_2), \dots, u_5 = o(u_6)$ en $+\infty$.

2. Donner un équivalent de $F(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + x^4 - (\ln x)^2$ en $+\infty$, puis de $G(x) = x + x^2|\ln x|$ en 0^+.

3. Déterminer, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite de $x^\alpha|\ln x|$ lorsque $x \to 0^+$.

Corrigé détaillé

1. Chaîne ordonnée. On obtient successivement

$$\ln x = o((\ln x)^3), \quad (\ln x)^3 = o(\sqrt{x}), \quad \sqrt{x} = o(x^2),$$
$$x^2 = o(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}), \qquad \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = o(\mathrm{e}^x).$$

Le premier quotient vaut $\frac{1}{(\ln x)^2}$, le troisième $x^{-\frac{3}{2}}$, et le dernier $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$; ils tendent vers 0. Les autres comparaisons sont celles du logarithme, des puissances et de l'exponentielle.

2. Factoriser le terme dominant. À $+\infty$,

$$\frac{F(x)}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 1 + \frac{x^4}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} - \frac{(\ln x)^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \longrightarrow 1, \quad \boxed{F(x) \sim \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}.$$

En 0^+, $\frac{G(x)}{x} = 1 + x|\ln x| \to 1$, d'où $\boxed{G(x) \sim x}$.

3. Discussion du paramètre. Posons $t = -\ln x \to +\infty$, donc $x = \mathrm{e}^{-t}$. Alors $x^\alpha|\ln x| = t\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^\alpha|\ln x| = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ +\infty, & \alpha \leq 0. \end{cases}}$$

Pour $\alpha > 0$, l'exponentielle domine t. Pour $\alpha = 0$, l'expression vaut t. Pour $\alpha < 0$, les deux facteurs positifs tendent vers $+\infty$.

Exercice 5 – Reconnaître et construire des fonctions convexes

Dérivée seconde, composition et maximum

1. Étudier la convexité de $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \ln x$ sur leurs domaines. Déterminer les polynômes de degré impair convexes sur tout $\mathbb{R}$.

2. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ convexes, où I, J sont des intervalles. Si g est croissante, démontrer que $g \circ f$ est convexe. Appliquer à $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

3. Pour deux fonctions convexes $f, g : I \to \mathbb{R}$, montrer que $\max(f, g)$ est convexe. Étudier $\min(f, g)$ lorsque $f(x) = x$ et $g(x) = -x$.

Corrigé détaillé

1. Étude de la convexité. On utilise le critère $f'' \geq 0 \Longrightarrow f$ convexe.

i) $f(x) = x^4$:

$$f''(x) = 12x^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

ii) $g(x) = x^3$:

$$g''(x) = 6x \begin{cases} \leq 0, & x \leq 0, \\ \geq 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi g est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.

iii) $h(x) = \ln x$:

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad \forall x > 0.$$

Donc h est strictement concave sur $]0, +\infty[$.

Soit maintenant P un polynôme de degré impair $d \geq 3$, de coefficient dominant $a_d \neq 0$. Alors

$$P''(x) \sim d(d-1)a_d x^{d-2} \quad (x \to \pm\infty).$$

Puisque $d-2$ est impair, P'' prend des valeurs de signes opposés aux deux infinis.
Ainsi P'' ne peut être positive sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, les seuls polynômes de degré impair convexes sur $\mathbb{R}$ sont

$$\boxed{P(x) = ax + b, \quad a \neq 0.}$$

2. Convexité d'une composée. Soient $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.
Par convexité de f,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Comme g est croissante,

$$g(f((1-t)x + ty)) \leq g((1-t)f(x) + tf(y)).$$

Puis, par convexité de g,

$$g((1-t)f(x) + tf(y)) \leq (1-t)g(f(x)) + tg(f(y)).$$

D'où

$$\boxed{(g \circ f)((1-t)x + ty) \leq (1-t)(g \circ f)(x) + t(g \circ f)(y).}$$

Ainsi $g \circ f$ est convexe sur I.
Application : $f(x) = x^2$ et $g(u) = \mathrm{e}^u$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, et g est croissante. Donc

$$\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$$

3. Maximum de deux fonctions convexes. Posons $h = \max(f, g)$.
Pour $x, y \in I$, $t \in [0, 1]$, soit $z = (1-t)x + ty$.
Par convexité de f et de g,

$$\begin{aligned} f(z) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ &\leq (1-t)h(x) + th(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(z) &\leq (1-t)g(x) + tg(y) \\ &\leq (1-t)h(x) + th(y). \end{aligned}$$

En prenant le maximum,

$$\boxed{h(z) \leq (1-t)h(x) + th(y).}$$

Donc $\max(f, g)$ est convexe sur I.

En revanche, le minimum de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe.
En effet, pour $f(x) = x$ et $g(x) = -x$,

$$h(x) = \min(x, -x) = -|x|.$$

Or

$$h(0) = 0 > \frac{h(-1) + h(1)}{2} = -1.$$

L'inégalité de convexité n'est donc pas vérifiée. Ainsi

$$\boxed{\min(f, g) \text{ n'est pas nécessairement convexe.}}$$

Exercice 6 – Tangentes, cordes et inégalité de Bernoulli

Transformer la convexité en encadrements

1. Justifier, à l'aide des tangentes, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$. Préciser les cas d'égalité.

2. En utilisant la concavité de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, démontrer

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Préciser les cas d'égalité.

3. Soit $n \geq 2$ entier. Étudier la convexité de $f_n(x) = (1 + x)^n$ sur $[-1, +\infty[$, puis démontrer

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad x \geq -1.$$

Déterminer le cas d'égalité.

Corrigé détaillé

1. Inégalités par les tangentes.

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$. On a

$$f''(x) = \mathrm{e}^x > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
L'équation de sa tangente en 0 est

$$T_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x.$$

Par convexité,

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$.
Soit maintenant $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Donc g est strictement concave sur $]0, +\infty[$.
Sa tangente en 1 est

$$T_1(x) = g(1) + g'(1)(x - 1) = x - 1.$$

Par concavité,

$$\boxed{\ln x \leq x - 1, \quad \forall x > 0.}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $x = 1$.

2. Encadrement de la fonction sinus.

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$(\sin x)'' = -\sin x \leq 0.$$

Donc sin est concave sur cet intervalle.

La corde joignant $A = (0, 0)$ et $B = (\frac{\pi}{2}, 1)$ a pour équation

$$y = \frac{2x}{\pi}.$$

Une fonction concave étant au-dessus de ses cordes, on obtient

$$\boxed{\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

D'autre part, la tangente en 0 est

$$T_0(x) = \sin(0) + \cos(0)x = x.$$

Par concavité,

$$\boxed{\sin x \leq x.}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$.

Finalement,

$$\boxed{\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.}$$

3. Inégalité de Bernoulli.

Soit $n \geq 2$ et $f_n(x) = (1 + x)^n$, $x \geq -1$.

Pour $x > -1$, on a

$$f_n'(x) = n(1 + x)^{n-1},$$
$$f_n''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2} > 0.$$

Donc f_n est strictement convexe sur $[-1, +\infty[$.

L'équation de sa tangente en 0 est

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f_n(0) + f_n'(0)x \\ &= 1 + nx. \end{aligned}$$

Par convexité,

$$f_n(x) \geq T_0(x).$$

D'où

$$\boxed{(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad x \geq -1.}$$

La stricte convexité implique

$$(1 + x)^n = 1 + nx \iff \boxed{x = 0}.$$

Exercice 7 – Jensen et comparaison des moyennes

Choisir la fonction convexe ou concave adaptée

On rappelle l'inégalité de Jensen : si f est convexe, $\lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

1. Pour $a_1, \ldots, a_n > 0$, démontrer

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

2. Pour $x_1, \ldots, x_n > 0$, établir

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x_i}\right) \geq 1.$$

3. Étudier la concavité de $F(x) = \ln(\ln x)$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire, pour $a, b > 1$,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \, \ln b}.$$

Dans chaque question, préciser le cas d'égalité.

Corrigé détaillé

1. Inégalité arithmético-géométrique.

Considérons $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty[$. On a

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad x > 0.$$

Ainsi f est strictement concave.

En appliquant Jensen avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right) &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln a_i \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \\ &= \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right). \end{aligned}$$

Puisque exp est strictement croissante,

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.}$$

La stricte concavité donne

$$\boxed{\text{Égalité} \iff a_1 = \cdots = a_n.}$$

2. Inégalité des moyennes pondérées.

Considérons $f(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$.

On a

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} > 0.$$

Donc f est strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

Par l'inégalité de Jensen,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

D'où

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x_i}.$$

Or $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i > 0$, donc

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x_i}\right) \geq 1.}$$

La stricte convexité implique

$$\boxed{\text{Égalité} \iff x_1 = \cdots = x_n.}$$

En particulier, pour $\lambda_i = \frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq 1.$$

Ainsi

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.}$$

3. Concavité de $\ln(\ln x)$.

Soit $F(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

On a

$$F'(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

et

$$F''(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2 (\ln x)^2} < 0, \qquad x > 1.$$

Donc F est strictement concave sur $]1, +\infty[$.

Pour $a, b > 1$, Jensen donne

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{F(a) + F(b)}{2}.$$

Ainsi

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{\ln(\ln a) + \ln(\ln b)}{2}.$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) &\geq \exp\left(\frac{\ln(\ln a) + \ln(\ln b)}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln(\ln a \, \ln b)\right) \\ &= \sqrt{\ln a \, \ln b}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \, \ln b}.}$$

La stricte concavité de F donne

$$\boxed{\text{Égalité} \iff a = b.}$$

Exercice 8 – Pentes des sécantes et propriétés globales

Démontrer sans supposer la dérivabilité

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tous $a < b < c$ dans I, montrer que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

2. Soit $a \in I$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{aligned}$$

est croissante.

3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local en x_0, montrer que ce minimum est global. Montrer que si f est strictement convexe, elle admet au plus un minimum global.

4. Montrer qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.
Le résultat reste-t-il vrai sur un intervalle borné ? Justifier.

Corrigé détaillé

1. Inégalités des pentes des sécantes.

Soient $a < b < c$ dans I. On a

$$b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c.$$

Par convexité de f,

$$f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c).$$

En multipliant par $c-a > 0$,

$$(c-a)f(b) \leq (c-b)f(a) + (b-a)f(c).$$

En soustrayant $(c-a)f(a)$,

$$(c-a)(f(b)-f(a)) \leq (b-a)(f(c)-f(a)).$$

D'où

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

De même, en réarrangeant l'inégalité,

$$(c-b)(f(c)-f(a)) \leq (c-a)(f(c)-f(b)).$$

Ainsi

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Finalement,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

2. Croissance de la pente des sécantes.

Fixons $a \in I$ et posons

$$\varphi_a(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}, \qquad t \in I \setminus \{a\}.$$

Soient $t_1 < t_2$ dans $I \setminus \{a\}$. Distinguons trois cas.

i) Si $a < t_1 < t_2$, d'après la question 1,

$$\frac{f(t_1)-f(a)}{t_1-a} \leq \frac{f(t_2)-f(a)}{t_2-a}.$$

ii) Si $t_1 < t_2 < a$, alors

$$\frac{f(a)-f(t_1)}{a-t_1} \leq \frac{f(a)-f(t_2)}{a-t_2}.$$

iii) Si $t_1 < a < t_2$, alors

$$\frac{f(a)-f(t_1)}{a-t_1} \leq \frac{f(t_2)-f(a)}{t_2-a}.$$

Dans les trois cas,

$$t_1 < t_2 \Longrightarrow \varphi_a(t_1) \leq \varphi_a(t_2).$$

Par conséquent,

$$t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}.$$

3. Minimum local et minimum global.

Supposons que x_0 soit un minimum local de f. Alors

$$\exists \delta > 0, \quad |x-x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x_0$. Pour

$$0 < t < \min\left\{1, \frac{\delta}{|y-x_0|}\right\},$$

posons $z_t = (1-t)x_0 + ty$.

On a

$$|z_t - x_0| = t|y-x_0| < \delta.$$

Donc, par minimalité locale et convexité,

$$f(x_0) \leq f(z_t) \leq (1-t)f(x_0) + tf(y).$$

Il en résulte

$$tf(x_0) \leq tf(y).$$

Puisque $t > 0$,

$$f(x_0) \leq f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ainsi x_0 est un minimum global.

Supposons maintenant f strictement convexe.

Si $x_1 \neq x_2$ sont deux minima globaux, de valeur m, alors

$$f(x_1) = f(x_2) = m.$$

Par stricte convexité,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = m.$$

Contradiction avec la minimalité de m.

Donc

$$f \text{ admet au plus un minimum global.}$$

4. Fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$.

Supposons f convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq M, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Raisonnons par l'absurde. Si f n'est pas constante, il existe $a < b$ tels que

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0.$$

i) Si $m > 0$, pour tout $x > b$, la question 1 donne

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq m.$$

D'où

$$f(x) \geq f(b) + m(x - b).$$

Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} (f(b) + m(x - b)) = +\infty,$$

ce qui contredit $f(x) \leq M$.

ii) Si $m < 0$, pour tout $x < a$,

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq m.$$

D'où

$$f(x) \geq f(a) - m(a - x).$$

Comme $-m > 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} (f(a) - m(a - x)) = +\infty,$$

ce qui contredit encore $f(x) \leq M$.

Par conséquent,

$$f \text{ convexe et majorée sur } \mathbb{R} \Longrightarrow f \text{ constante.}$$

Sur un intervalle borné, le résultat est faux. En effet,

$$f(x) = x^2, \qquad x \in [0, 1],$$

vérifie

$$f''(x) = 2 > 0, \qquad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

Donc f est convexe, majorée et non constante sur $[0, 1]$.

Exercice 9 – Encadrement d'une intégrale par convexité

Inégalité de Hermite–Hadamard

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ une fonction convexe. Posons $m = \frac{a+b}{2}$.

1. Comparer $f(t)$ à sa tangente en m, puis intégrer sur $[a,b]$.

2. Comparer $f(t)$ à la corde joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, puis établir

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

3. Appliquer cet encadrement à $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1,2]$ pour encadrer $\ln 2$.

4. Montrer que l'égalité dans l'une des deux bornes équivaut au fait que f soit affine sur $[a,b]$.

Corrigé détaillé

1. Minoration par la tangente.

Puisque f est convexe et dérivable, son graphe est au-dessus de ses tangentes.
Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$,

$$f(t) \geq f(m) + f'(m)(t-m).$$

En intégrant sur $[a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &\geq \int_a^b \left[f(m) + f'(m)(t-m)\right]\mathrm{d}t \\ &= (b-a)f(m) + f'(m)\int_a^b (t-m)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_a^b (t-m)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{(t-m)^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{(b-m)^2 - (a-m)^2}{2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Majoration par la corde.

Pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$t = \frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b.$$

Par convexité de f,

$$f(t) \leq \frac{b-t}{b-a}f(a) + \frac{t-a}{b-a}f(b).$$

En intégrant,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(a)\int_a^b \frac{b-t}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ + f(b)\int_a^b \frac{t-a}{b-a}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or

$$\int_a^b \frac{b-t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2},$$
$$\int_a^b \frac{t-a}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}.$$

D'où

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

En combinant les deux inégalités,

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

3. Application à la fonction inverse.

Considérons $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1,2]$.

On a

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} > 0, \qquad t \in [1,2].$$

Donc f est strictement convexe.

D'après l'inégalité de Hermite–Hadamard,

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \leq \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{f(1)+f(2)}{2}.$$

Or

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3},$$
$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^2 = \ln 2,$$
$$\frac{f(1)+f(2)}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi,

$$\frac{2}{3} \leq \ln 2 \leq \frac{3}{4}.$$

Comme f est strictement convexe, les inégalités sont strictes :

$$\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{3}{4}.$$

4. Étude des cas d'égalité.

i) Égalité dans la borne inférieure.

Posons, pour $t \in [a,b]$,

$$g(t) = f(t) - f(m) - f'(m)(t-m).$$

Par convexité,

$$g(t) \geq 0, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Si l'égalité a lieu, alors

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Puisque g est continue et positive ou nulle sur $[a,b]$,

$$g(t) = 0, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Par conséquent,

$$f(t) = f(m) + f'(m)(t-m),$$

donc f est affine sur $[a,b]$.

ii) Égalité dans la borne supérieure.

Soit ℓ la fonction affine définie par

$$\ell(t) = \frac{b-t}{b-a} f(a) + \frac{t-a}{b-a} f(b).$$

Par convexité,

$$\ell(t) - f(t) \geq 0, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Si l'égalité a lieu, alors

$$\int_a^b (\ell(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = 0.$$

Par continuité et positivité,

$$\ell(t) - f(t) = 0, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Ainsi $f = \ell$ sur $[a,b]$, donc f est affine.

Réciproquement, si $f(t) = \alpha t + \beta$, alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) + \beta(b-a) \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\text{Égalité dans l'une des deux bornes} \iff f \text{ est affine sur } [a,b].$$

Exercice 10 – Majorer une fonction par sa dérivée seconde

Un problème de synthèse sur la convexité

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Posons

$$M = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|, \qquad q(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x).$$

1. Justifier l'existence de M. Montrer que $g = f - q$ est convexe et que $h = f + q$ est concave.

2. Déterminer le signe de g et de h sur $[a,b]$, puis montrer

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leq \frac{M(b-a)^2}{8}.$$

3. Montrer que la constante $\frac{1}{8}$ est optimale.

4. Soit $F \in \mathcal{C}^2([a,b])$ et ℓ la fonction affine vérifiant $\ell(a) = F(a)$ et $\ell(b) = F(b)$. En déduire une majoration de $|F(x) - \ell(x)|$.

Corrigé détaillé

1. Étude des fonctions auxiliaires.

Puisque $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, la fonction $|f''|$ est continue sur le compact $[a,b]$.
D'après le théorème des bornes atteintes,

$$\exists t_0 \in [a,b], \qquad M = |f''(t_0)| < +\infty.$$

Par définition de M,

$$-M \leq f''(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Or

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{M}{2}(x-a)(b-x), \\ q'(x) &= \frac{M}{2}(a+b-2x), \\ q''(x) &= -M. \end{aligned}$$

Pour $g = f - q$, on obtient

$$g''(x) = f''(x) + M \geq 0.$$

Ainsi g est convexe sur $[a,b]$.
Pour $h = f + q$, on a

$$h''(x) = f''(x) - M \leq 0.$$

Donc h est concave sur $[a,b]$.

2. Majoration de $|f(x)|$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b.$$

De plus, puisque $f(a) = f(b) = 0$ et $q(a) = q(b) = 0$,

$$g(a) = g(b) = h(a) = h(b) = 0.$$

Par convexité de g,

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \frac{b-x}{b-a}g(a) + \frac{x-a}{b-a}g(b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, par concavité de h,

$$\begin{aligned} h(x) &\geq \frac{b-x}{b-a}h(a) + \frac{x-a}{b-a}h(b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} f(x) - q(x) \leq 0, \\ f(x) + q(x) \geq 0. \end{cases}$$

D'où

$$-q(x) \leq f(x) \leq q(x).$$

Comme $q(x) \geq 0$ sur $[a,b]$,

$$|f(x)| \leq q(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x).$$

D'autre part,

$$(x-a)(b-x) = \frac{(b-a)^2}{4} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Par conséquent,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leq \frac{M(b-a)^2}{8}, \quad \forall x \in [a,b].$$

3. Optimalité de la constante.

Considérons

$$f(x) = (x-a)(b-x), \qquad x \in [a,b].$$

On a

$$f(a) = f(b) = 0, \qquad f''(x) = -2.$$

Ainsi

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = 2.$$

En prenant $x = \frac{a+b}{2}$,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = \frac{(b-a)^2}{4} = \frac{M(b-a)^2}{8}.$$

Supposons qu'il existe $C < \frac{1}{8}$ tel que, pour toute fonction admissible,

$$|f(x)| \leq CM(b-a)^2.$$

Pour la fonction précédente, au milieu de l'intervalle, on obtiendrait

$$\frac{M(b-a)^2}{8} \leq CM(b-a)^2.$$

Puisque $M(b-a)^2 > 0$,

$$\frac{1}{8} \leq C,$$

ce qui est contradictoire.

La constante $\frac{1}{8}$ est donc optimale.

4. Erreur d'interpolation affine.

Soit $F \in \mathcal{C}^2([a,b])$. La fonction affine interpolant F aux points a et b est

$$\ell(x) = \frac{b-x}{b-a}F(a) + \frac{x-a}{b-a}F(b).$$

Posons

$$u(x) = F(x) - \ell(x).$$

On a

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Puisque $\ell''(x) = 0$,

$$u''(x) = F''(x).$$

Posons

$$M_F = \max_{t\in[a,b]} |F''(t)|.$$

D'après la question 2, appliquée à u,

$$|u(x)| \leq \frac{M_F}{2}(x-a)(b-x) \leq \frac{M_F(b-a)^2}{8}.$$

Comme $u = F - \ell$, on obtient

$$|F(x) - \ell(x)| \leq \frac{M_F}{2}(x-a)(b-x) \leq \frac{M_F(b-a)^2}{8}.$$

En particulier,

$$\max_{x\in[a,b]} |F(x) - \ell(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{t\in[a,b]} |F''(t)|.$$