TRAVAUX DIRIGÉS / SÉRIE 2

Formules de Taylor

Taylor–Lagrange, reste intégral, Taylor–Young et applications

Énoncés

Consigne. Justifier les réponses et préciser les hypothèses des résultats utilisés.

Exercice 1 – Construire le polynôme de Taylor

Dérivées successives et unicité

On note $T_{n,a}$ le polynôme de Taylor d'ordre n au centre a.

1. Montrer que $\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ sur $]0,+\infty[$, puis donner $T_{4,1}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2. Calculer $T_{3,2}$ de $x \mapsto \ln x$, en écrivant le résultat en puissances de $h = x - 2$.

3. Pour $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$, établir $f^{(k)}(x) = (x+k+1)\mathrm{e}^x$, puis déterminer $T_{3,0}$.

4. Montrer qu'il existe au plus un polynôme P de degré au plus n tel que $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $0 \le k \le n$.

Exercice 2 – Valeurs approchées et erreur garantie

Choisir l'ordre et majorer la bonne dérivée

1. Pour $a > 0$, montrer par Taylor–Lagrange que

$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right| \le \frac{a^5}{120}.$$

En déduire $\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$.

2. Pour $x \ge 0$, établir

$$0 \le \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \le \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1{,}003)$ avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

3. Montrer que $|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{6}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner un rayon $r > 0$ garantissant une erreur au plus 10^{-4} pour $|x| \le r$.

Exercice 3 – Deux suites classiques de sommes partielles

Prouver la convergence et contrôler le reste

Pour $n \ge 1$, posons

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. En appliquant Taylor–Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1, montrer $0 < \mathrm{e} - u_n \le \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$. En déduire la limite de u_n.

2. Vérifier, pour $t \in [0,1]$, l'identité

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

L'intégrer pour obtenir une expression exacte de $\ln 2 - v_n$.

3. Montrer $|\ln 2 - v_n| \leq \frac{1}{n+1}$, déterminer le signe du reste et en déduire la limite de v_n.

4. On admet $\mathrm{e} < 3$. Donner un rang suffisant pour une erreur inférieure à 10^{-3} dans chacune des deux approximations.

Exercice 4 – Du reste intégral au reste de Lagrange

Comprendre les formules et leurs hypothèses

Soient $a < b$, $n \geq 1$ entier et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$.

1. Montrer par intégrations par parties successives que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Pour une fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b (b-t)^{n-1} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^n}{n} g(c).$$

3. En déduire Taylor–Lagrange à l'ordre $n-1$, puis une borne du reste si $|f^{(n)}| \leq M$ sur $[a,b]$.

4. Pour $x \geq 0$, appliquer la formule intégrale à e^x pour montrer

$$\frac{x^3}{6} \leq \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq \mathrm{e}^x \frac{x^3}{6}.$$

Exercice 5 – Une intégrale calculée grâce à Taylor

Reconnaître le noyau du reste intégral

On veut calculer

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour $f(x) = \ln(1+x^2)$, calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(x)$.

2. Écrire Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre 0 et 1.

3. Identifier l'intégrande et en déduire la valeur exacte de I.

4. Expliquer pourquoi le choix de f évite une décomposition en éléments simples.

Exercice 6 – Un encadrement polynomial valable sur une demi-droite

Exploiter le signe du reste

Soit $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$ pour $x > -1$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ et $f^{(4)}(x)$; préciser leurs signes.

2. Déterminer les polynômes de Taylor P_2 et P_3 au centre 0.

3. Montrer, pour tout $x \geq 0$,

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$

4. Donner un encadrement de $\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}03}}$ et la largeur exacte de cet encadrement.

Exercice 7 – Limites déduites de Taylor–Young

Développer chaque fonction au bon ordre

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2$ au voisinage de a. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

4. Pour chaque question, indiquer les fonctions développées, leur centre et l'ordre nécessaire. Dans la question 2, développer f' directement.

Exercice 8 – Approximer les dérivées par des différences centrées

Faire disparaître les termes de parité opposée

Soient $h > 0$ et $f \in \mathcal{C}^4([a-h, a+h])$. Posons

$$D_h = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}, \qquad S_h = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2},$$

$M_3 = \max\limits_{[a-h,a+h]} |f'''|$ et $M_4 = \max\limits_{[a-h,a+h]} |f^{(4)}|$.

1. En développant à l'ordre 2 aux points $a+h$ et $a-h$, montrer $|D_h - f'(a)| \leq \frac{M_3 h^2}{6}$.

2. En développant à l'ordre 3, établir $|S_h - f''(a)| \leq \frac{M_4 h^2}{12}$.

3. Pour $f(x) = \sin x$ et $h = 10^{-2}$, donner les deux bornes d'erreur, valables pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 – Contrôler une dérivée par Taylor

Majoration globale et contrainte aux extrémités

A. Inégalité de Kolmogorov. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''| < +\infty$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, montrer $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

2. Optimiser en h lorsque $M_0, M_2 > 0$; traiter aussi les cas où l'un d'eux est nul. En déduire $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

B. Une dérivée seconde nécessairement grande. Soit $g \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que

$$g(0) = g'(0) = g'(1) = 0, \qquad g(1) = 1.$$

En développant $g\left(\frac{1}{2}\right)$ autour de 0 puis de 1, montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|g''(c)| \geq 4$.

Exercice 10 – Méthode de Newton et erreur quadratique

Synthèse : convexité, suites et Taylor–Lagrange

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telles que $f(a) < 0 < f(b)$, $f' > 0$ et $f'' > 0$ sur $[a,b]$.

1. Montrer que f possède un unique zéro $\gamma \in]a,b[$.

2. Pour $x \in [\gamma, b]$, justifier géométriquement et algébriquement

$$\gamma \leq \varphi(x) \leq x, \qquad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

3. Posons $x_0 = b$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Montrer que la suite est bien définie et converge vers γ.

4. Avec $m = \min\limits_{[a,b]} f' > 0$, $M = \max\limits_{[a,b]} |f''|$ et $K = \frac{M}{2m}$, établir

$$|x_{n+1} - \gamma| \leq K|x_n - \gamma|^2, \quad K|x_n - \gamma| \leq \big(K|x_0 - \gamma|\big)^{2^n}.$$

5. Appliquer à $f(x) = x^2 - 3$ sur $[1.7, 1.8]$: écrire la récurrence, calculer x_1 et x_2, puis montrer que x_3 approche $\sqrt{3}$ avec une erreur inférieure à 10^{-8}.