TRAVAUX DIRIGÉS / SÉRIE 2

Formules de Taylor

Taylor–Lagrange, reste intégral, Taylor–Young et applications

Énoncés et corrigés détaillés

Consigne. Justifier les réponses et préciser les hypothèses des résultats utilisés.

Exercice 1 – Construire le polynôme de Taylor

Dérivées successives et unicité

On note $T_{n,a}$ le polynôme de Taylor d'ordre n au centre a.

1. Montrer que $(\frac{1}{x})^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ sur $]0,+\infty[$, puis donner $T_{4,1}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2. Calculer $T_{3,2}$ de $x \mapsto \ln x$, en écrivant le résultat en puissances de $h = x-2$.

3. Pour $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$, établir $f^{(k)}(x) = (x+k+1)\mathrm{e}^x$, puis déterminer $T_{3,0}$.

4. Montrer qu'il existe au plus un polynôme P de degré au plus n tel que $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $0 \le k \le n$.

Corrigé détaillé

1. Dérivées de la fonction inverse. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Montrons par récurrence que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Pour $k = 0$, la formule est immédiate. Si elle est vraie au rang k,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((-1)^k k! x^{-k-1}\right) \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)! x^{-k-2}. \end{aligned}$$

La propriété est donc établie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$, on obtient, pour $h = x-1$,

$$T_{4,1}(1+h) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k h^k = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4.$$

2. Polynôme de Taylor du logarithme. Pour $f(x) = \ln x$, au centre $a = 2$,

$$f(2) = \ln 2, \qquad f'(2) = \frac{1}{2},$$
$$f''(2) = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(2) = \frac{1}{4}.$$

Avec $h = x-2$,

$$\begin{aligned} T_{3,2}(2+h) &= f(2) + h f'(2) + \frac{h^2}{2!} f''(2) + \frac{h^3}{3!} f'''(2) \\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24}. \end{aligned}$$

3. Produit avec l'exponentielle. Pour $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$, la formule $f^{(k)}(x) = (x+k+1)\mathrm{e}^x$ est vraie pour $k=0$. Si elle est vraie au rang k, alors

$$f^{(k+1)}(x) = \big((x+k+1)\mathrm{e}^x\big)' = (x+k+2)\mathrm{e}^x.$$

Par récurrence, $f^{(k)}(0) = k+1$ et

$$\begin{aligned} T_{3,0}(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{k+1}{k!}x^k \\ &= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3. \end{aligned}$$

4. Unicité du polynôme de Taylor. Supposons que $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré au plus n, vérifient les conditions prescrites. Posons $H = P - Q$. Alors $H^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \le k \le n$. Or il existe $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$H(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k, \qquad H^{(k)}(a) = k! b_k.$$

Ainsi $b_k = 0$ pour tout k, d'où $P = Q$.

Exercice 2 – Valeurs approchées et erreur garantie

Choisir l'ordre et majorer la bonne dérivée

1. Pour $a > 0$, montrer par Taylor–Lagrange que

$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right| \le \frac{a^5}{120}.$$

En déduire $\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$.

2. Pour $x \ge 0$, établir

$$0 \le \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \le \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1{,}003)$ avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

3. Montrer que $|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{6}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner un rayon $r > 0$ garantissant une erreur au plus 10^{-4} pour $|x| \le r$.

Corrigé détaillé

1. Approximation du cosinus. Les dérivées du cosinus en 0 donnent

$$T_{4,0}(a) = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}.$$

Par Taylor–Lagrange, pour $a > 0$,

$$\cos a = T_{4,0}(a) + \frac{\cos^{(5)}(c)}{5!}a^5, \qquad c \in]0, a[.$$

Or $\cos^{(5)}(c) = -\sin c$ et $|\sin c| \le 1$; donc

$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right| \le \frac{a^5}{120}.$$

Pour $a = \frac{1}{2}$,

$$1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{384} = \frac{337}{384}, \qquad \frac{a^5}{120} = \frac{1}{3840}.$$

Par conséquent,

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

2. Approximation du logarithme. Soit $f(t) = \ln(1+t)$. On a

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

Pour $x > 0$, Taylor–Lagrange à l'ordre 2 donne

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}, \qquad c \in]0, x[.$$

Comme $0 < \frac{1}{(1+c)^3} \leq 1$,

$$0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}.$$

Pour $x = 0$, l'égalité est immédiate. Avec $x = 0{,}003$,

$$x - \frac{x^2}{2} = 0{,}0029955, \qquad \frac{x^3}{3} = 9 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

Ainsi 0,0029955 approche $\ln(1{,}003)$ avec une erreur strictement inférieure à 10^{-8}.

3. Approximation du sinus. Taylor–Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et x donne

$$\sin x = x + \frac{-\cos c}{3!} x^3,$$

où c appartient au segment d'extrémités 0 et x. Puisque $|\cos c| \leq 1$,

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Il suffit d'imposer $\frac{r^3}{6} \leq 10^{-4}$. Le choix $r = 0{,}08$ convient, puisque

$$\frac{(0{,}08)^3}{6} < 10^{-4}.$$

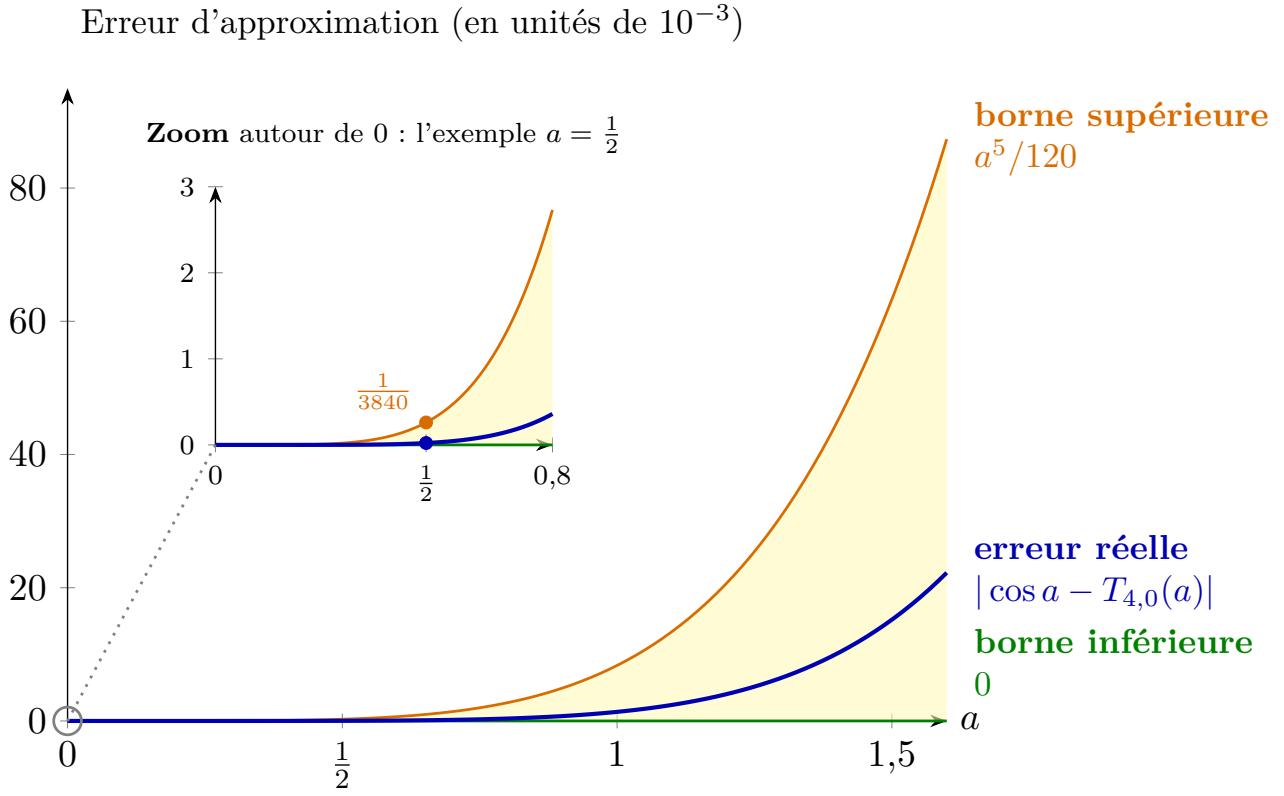


FIGURE 1 – Approximation du cosinus : l'erreur $|\cos a - T_{4,0}(a)|$ reste sous la courbe $\frac{a^5}{120}$; le zoom montre l'exemple $a = \frac{1}{2}$, où l'erreur est au plus $\frac{1}{3840}$.

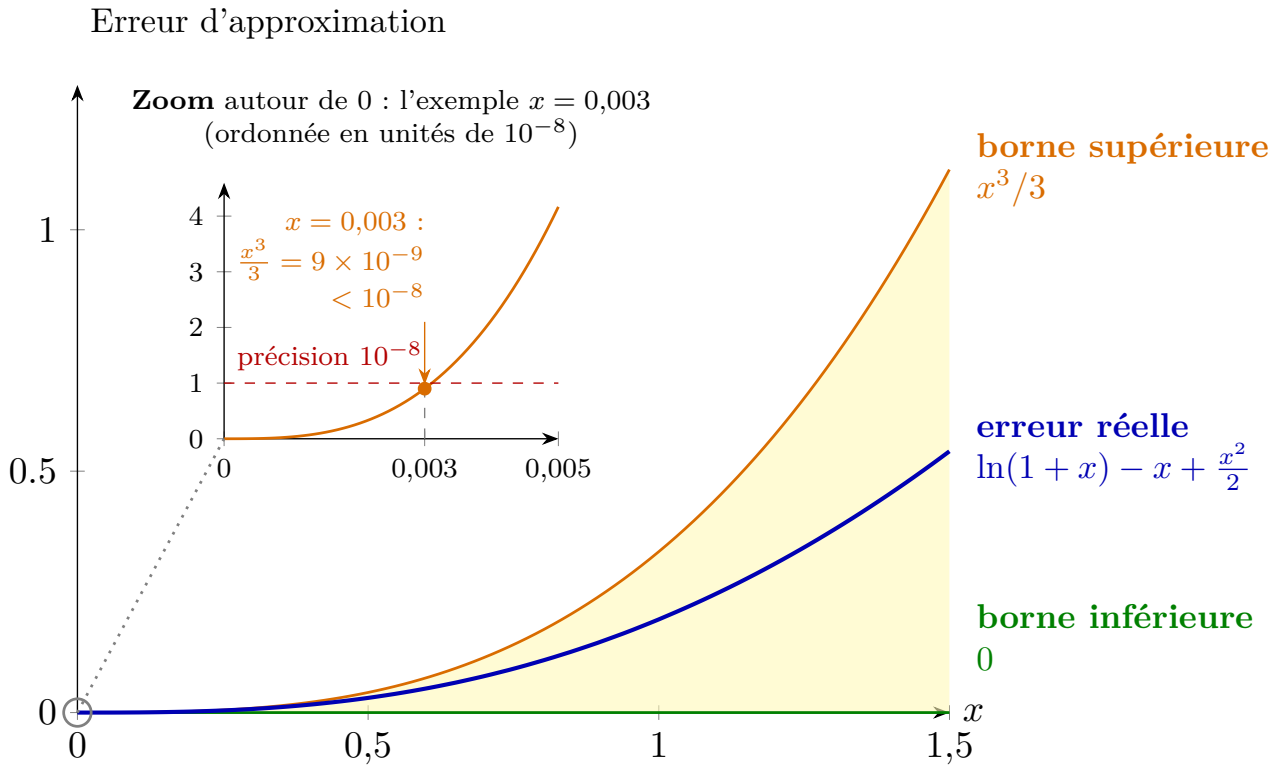


FIGURE 2 – Approximation du logarithme : $0 \le \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \le \frac{x^3}{3}$; le zoom montre que pour $x = 0{,}003$ la borne $\frac{x^3}{3} = 9 \times 10^{-9}$ est inférieure à 10^{-8}.

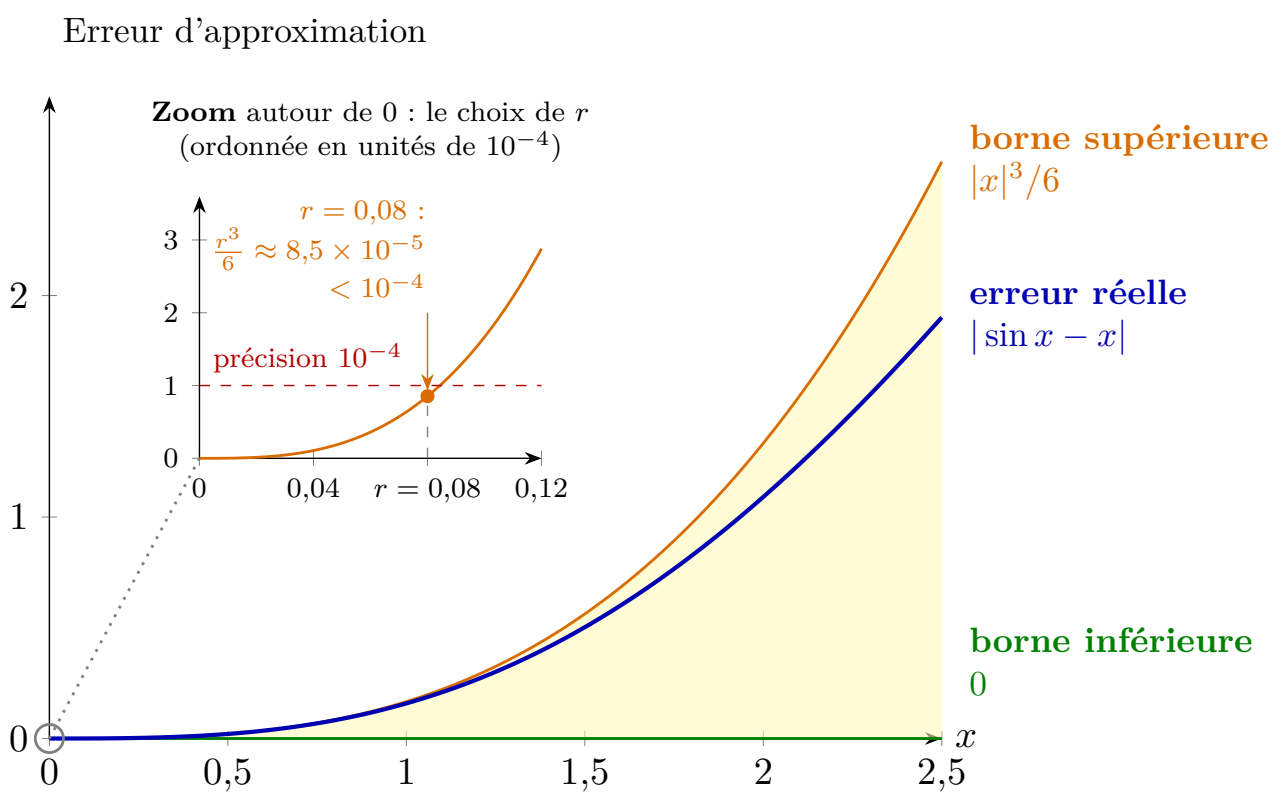


FIGURE 3 – Approximation du sinus : $|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{6}$; le zoom montre que $r = 0{,}08$ convient, car $\frac{r^3}{6} < 10^{-4}$.

Exercice 3 – Deux suites classiques de sommes partielles

Prouver la convergence et contrôler le reste

Pour $n \ge 1$, posons

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. En appliquant Taylor–Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1, montrer $0 < \mathrm{e} - u_n \le \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$. En déduire la limite de u_n.

2. Vérifier, pour $t \in [0,1]$, l'identité

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

L'intégrer pour obtenir une expression exacte de $\ln 2 - v_n$.

3. Montrer $|\ln 2 - v_n| \le \frac{1}{n+1}$, déterminer le signe du reste et en déduire la limite de v_n.

4. On admet $\mathrm{e} < 3$. Donner un rang suffisant pour une erreur inférieure à 10^{-3} dans chacune des deux approximations.

Corrigé détaillé

1. Sommes partielles de l'exponentielle. Par Taylor–Lagrange en 0 à l'ordre n,

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{c_n}}{(n+1)!}, \qquad c_n \in]0,1[.$$

D'où, puisque $1 < \mathrm{e}^{c_n} < \mathrm{e}$,

$$0 < \mathrm{e} - u_n < \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.

2. Reste de la somme géométrique. Pour $t \in [0,1]$,

$$(1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = 1-(-t)^n.$$

Donc

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

En intégrant sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= v_n + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

3. Signe, majoration et convergence. Pour $t \in [0,1]$,

$$0 \le \frac{t^n}{1+t} \le t^n.$$

Ainsi

$$0 < \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$|\ln 2 - v_n| \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

De plus,

$$\begin{cases}\ln 2 - v_n > 0, & n \text{ pair},\\ \ln 2 - v_n < 0, & n \text{ impair}.\end{cases}$$

Donc $v_n \to \ln 2$.

4. Rangs garantissant la précision. Sachant $\mathrm{e} < 3$,

$$|\mathrm{e} - u_n| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Pour $n = 6$,

$$\frac{3}{7!} < 10^{-3}.$$

De même, pour $n = 1000$,

$$|\ln 2 - v_n| \le \frac{1}{1001} < 10^{-3}.$$

Ces deux rangs sont suffisants.

Exercice 4 – Du reste intégral au reste de Lagrange

Comprendre les formules et leurs hypothèses

Soient $a < b$, $n \geq 1$ entier et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$.

1. Montrer par intégrations par parties successives que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Pour une fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b (b-t)^{n-1} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^n}{n} g(c).$$

3. En déduire Taylor–Lagrange à l'ordre $n-1$, puis une borne du reste si $|f^{(n)}| \leq M$ sur $[a,b]$.

4. Pour $x \geq 0$, appliquer la formule intégrale à e^x pour montrer

$$\frac{x^3}{6} \leq \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq \mathrm{e}^x \frac{x^3}{6}.$$

Corrigé détaillé

1. Formule de Taylor avec reste intégral. Pour $1 \leq k \leq n$, posons

$$I_k = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^b (b-t)^{k-1} f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a $I_1 = f(b) - f(a)$. Pour $k \geq 2$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(t)\right]_a^b + \frac{1}{(k-2)!}\int_a^b (b-t)^{k-2} f^{(k-1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) + I_{k-1}. \end{aligned}$$

En itérant de $k = n$ jusqu'à $k = 2$,

$$I_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k.$$

Ainsi

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Théorème de la moyenne pondérée. La continuité de g sur $[a,b]$ assure l'existence de

$$m_g = \min_{[a,b]} g, \qquad M_g = \max_{[a,b]} g.$$

Pour $t \in [a,b]$, $m_g \leq g(t) \leq M_g$ et $(b-t)^{n-1} \geq 0$. En intégrant,

$$\begin{aligned} m_g \int_a^b (b-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b (b-t)^{n-1} g(t)\,\mathrm{d}t \\ \leq M_g \int_a^b (b-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or

$$\int_a^b (b-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^n}{n}.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires fournit $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b (b-t)^{n-1} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^n}{n} g(c).$$

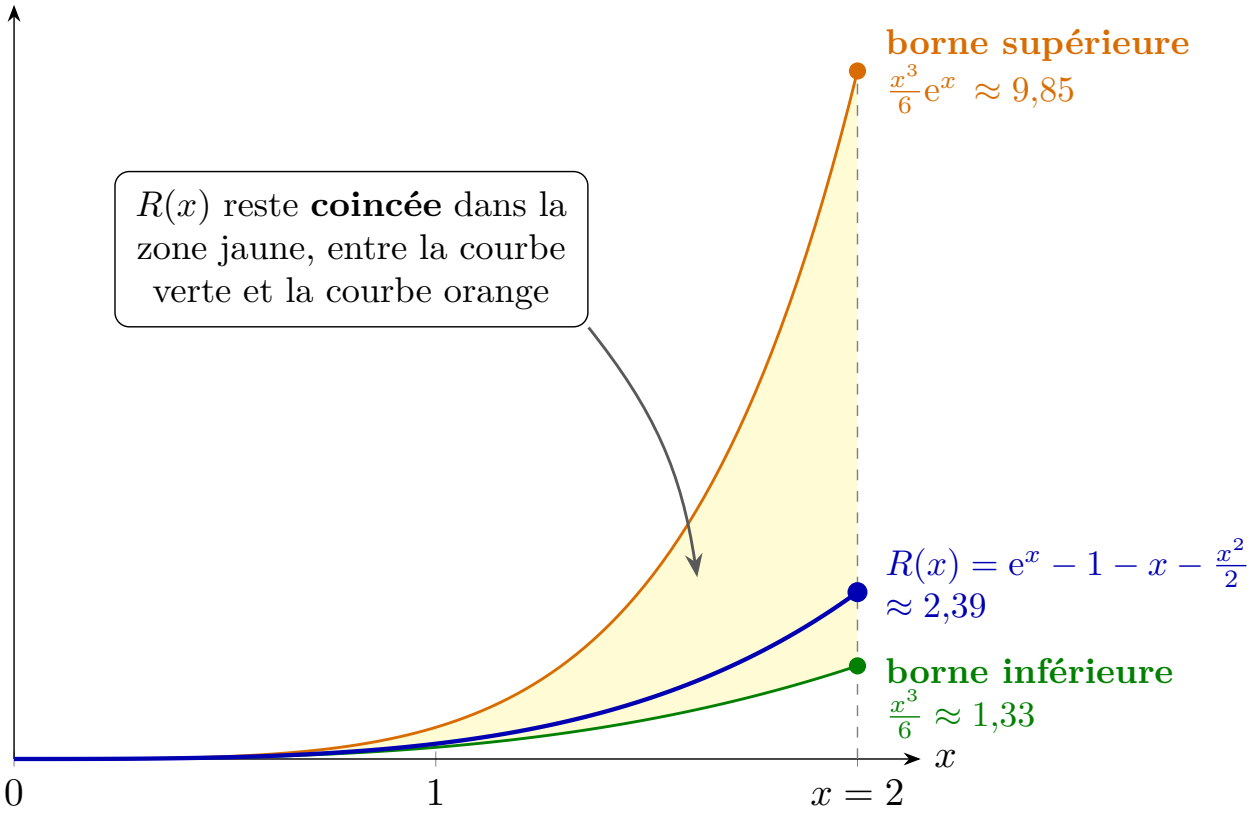


FIGURE 4 – Encadrement de $\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ par $\frac{x^3}{6}$ et $\mathrm{e}^x \frac{x^3}{6}$ (exemple pour $x = 2$).

3. Formule de Taylor–Lagrange. En prenant $g = f^{(n)}$ dans la question 2,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Si $|f^{(n)}(t)| \le M$ sur $[a,b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \le \frac{M(b-a)^n}{n!}.$$

4. Encadrement du reste de l'exponentielle. Pour $x \ge 0$, le reste intégral à l'ordre 2 est

$$\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Or $1 \le \mathrm{e}^t \le \mathrm{e}^x$ pour $0 \le t \le x$; d'où

$$\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\,\mathrm{d}t \le \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \le \frac{\mathrm{e}^x}{2}\int_0^x (x-t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^x (x-t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$,

$$\frac{x^3}{6} \le \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \le \frac{\mathrm{e}^x x^3}{6}.$$

Exercice 5 – Une intégrale calculée grâce à Taylor

Reconnaître le noyau du reste intégral

On veut calculer

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour $f(x) = \ln(1+x^2)$, calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(x)$.

2. Écrire Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre 0 et 1.

3. Identifier l'intégrande et en déduire la valeur exacte de I.

4. Expliquer pourquoi le choix de f évite une décomposition en éléments simples.

Corrigé détaillé

1. Calcul des dérivées. Pour $f(x) = \ln(1+x^2)$, on a

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2}, \qquad f'(0) = 0, \\ f''(x) &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

2. Taylor avec reste intégral. La formule d'ordre 1 entre 0 et 1 donne

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-t)(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $f(1) = \ln 2$,

$$\ln 2 = 2\int_0^1 \frac{(1-t)(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Calcul de l'intégrale. L'identité

$$1 - t^2 = (1-t)(1+t)$$

entraîne

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 2\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2I. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I = \frac{\ln 2}{2}.$$

4. Identification du noyau intégral. On remarque que

$$\frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}(1-t) f''(t).$$

Le facteur $1-t$ est le noyau du reste intégral à l'ordre 1 : l'intégrale se calcule donc avec $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$, sans recherche de primitive.

Exercice 6 – Un encadrement polynomial valable sur une demi-droite

Exploiter le signe du reste

Soit $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$ pour $x > -1$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ et $f^{(4)}(x)$; préciser leurs signes.

2. Déterminer les polynômes de Taylor P_2 et P_3 au centre 0.

3. Montrer, pour tout $x \geq 0$,

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$

4. Donner un encadrement de $\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}03}}$ et la largeur exacte de cet encadrement.

Corrigé détaillé

1. Dérivées et signes. Pour $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$ sur $]-1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{4}{3}} < 0, \\ f''(x) &= \frac{4}{9}(1+x)^{-\frac{7}{3}} > 0, \\ f'''(x) &= -\frac{28}{27}(1+x)^{-\frac{10}{3}} < 0, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{280}{81}(1+x)^{-\frac{13}{3}} > 0. \end{aligned}$$

2. Polynômes de Taylor en 0. Les valeurs des dérivées en 0 donnent

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) \\ &= 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}, \\ P_3(x) &= P_2(x) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) \\ &= 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}. \end{aligned}$$

3. Encadrement par les signes des restes. Pour $x > 0$, Taylor–Lagrange donne

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) &= \frac{f'''(c_2)}{3!}x^3 < 0, \\ f(x) - P_3(x) &= \frac{f^{(4)}(c_3)}{4!}x^4 > 0, \end{aligned}$$

avec $c_2, c_3 \in]0, x[$. Il en résulte

$$P_3(x) < f(x) < P_2(x), \qquad x > 0.$$

Les trois expressions valent 1 pour $x = 0$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$

4. Valeur numérique et largeur. Prenons $x = \frac{3}{100}$. Alors

$$P_2\left(\frac{3}{100}\right) = \frac{4951}{5000},$$
$$P_2\left(\frac{3}{100}\right) - P_3\left(\frac{3}{100}\right) = \frac{14}{81}\left(\frac{3}{100}\right)^3 = \frac{7}{1500000}.$$

On obtient donc

$$\frac{1485293}{1500000} < \frac{1}{\sqrt[3]{1{,}03}} < \frac{4951}{5000}.$$

La largeur exacte de l'encadrement est

$$\frac{7}{1500000}.$$

Exercice 7 – Limites déduites de Taylor–Young

Développer chaque fonction au bon ordre

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2$ au voisinage de a. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

3. Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

4. Pour chaque question, indiquer les fonctions développées, leur centre et l'ordre nécessaire. Dans la question 2, développer f' directement.

Corrigé détaillé

1. Différence seconde. Taylor–Young à l'ordre 2 en a fournit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2),$$
$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2).$$

En additionnant,

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = h^2 f''(a) + o(h^2).$$

Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

2. Différence entre deux quotients. La fonction f' est de classe $\mathcal{C}^1$ près de 0 ; ainsi

$$f'(x) = f'(0) + xf''(0) + o(x).$$

D'autre part,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2),$$

d'où, pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) + \frac{x}{2}f''(0) + o(x).$$

Par soustraction,

$$f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x}{2}f''(0) + o(x).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

3. Application au logarithme. Au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} &= \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} \\ &= \frac{1}{3} + o(1),\end{aligned}$$

ce qui donne la limite $\frac{1}{3}$.

4. Centres et ordres utilisés. Dans la question 1 : f au centre a, ordre 2. Dans la question 2 : f' au centre 0, ordre 1, puis f au centre 0, ordre 2. Dans la question 3 : $\ln(1+x)$ au centre 0, ordre 3. Aucun reste $o(x^2)$ n'a été dérivé formellement.

Exercice 8 – Approximer les dérivées par des différences centrées

Faire disparaître les termes de parité opposée

Soient $h > 0$ et $f \in \mathcal{C}^4([a-h, a+h])$. Posons

$$D_h = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}, \qquad S_h = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2},$$

$M_3 = \max_{[a-h,a+h]} |f'''|$ et $M_4 = \max_{[a-h,a+h]} |f^{(4)}|$.

1. En développant à l'ordre 2 aux points $a+h$ et $a-h$, montrer $|D_h - f'(a)| \leq \frac{M_3 h^2}{6}$.

2. En développant à l'ordre 3, établir $|S_h - f''(a)| \leq \frac{M_4 h^2}{12}$.

3. Pour $f(x) = \sin x$ et $h = 10^{-2}$, donner les deux bornes d'erreur, valables pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Corrigé détaillé

1. Approximation de la dérivée première. Taylor–Lagrange à l'ordre 2 aux points $a \pm h$ donne

$$\begin{aligned}f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + r_+, \\ f(a-h) &= f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + r_-,\end{aligned}$$

avec $|r_+|, |r_-| \leq \frac{M_3 h^3}{6}$. En soustrayant,

$$\begin{aligned}D_h - f'(a) &= \frac{r_+ - r_-}{2h}, \\ |D_h - f'(a)| &\leq \frac{|r_+| + |r_-|}{2h} \leq \frac{M_3 h^2}{6}.\end{aligned}$$

2. Approximation de la dérivée seconde. Taylor–Lagrange à l'ordre 3 donne

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \rho_+,$$
$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f'''(a) + \rho_-,$$

où $|\rho_+|, |\rho_-| \leq \frac{M_4 h^4}{24}$. En additionnant et en retranchant $2f(a)$,

$$S_h - f''(a) = \frac{\rho_+ + \rho_-}{h^2},$$
$$|S_h - f''(a)| \leq \frac{|\rho_+| + |\rho_-|}{h^2} \leq \frac{M_4 h^2}{12}.$$

3. Application au sinus. Pour $f(x) = \sin x$, on a

$$|f'''(t)| \leq 1, \quad |f^{(4)}(t)| \leq 1, \quad f'(a) = \cos a, \quad f''(a) = -\sin a.$$

En prenant $h = 10^{-2}$,

$$|D_h - \cos a| \leq \frac{10^{-4}}{6} = \frac{1}{60000},$$
$$|S_h + \sin a| \leq \frac{10^{-4}}{12} = \frac{1}{120000}.$$

Ces estimations valent pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 – Contrôler une dérivée par Taylor

Majoration globale et contrainte aux extrémités

A. Inégalité de Kolmogorov. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''| < +\infty$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, montrer $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

2. Optimiser en h lorsque $M_0, M_2 > 0$; traiter aussi les cas où l'un d'eux est nul. En déduire $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

B. Une dérivée seconde nécessairement grande. Soit $g \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que

$$g(0) = g'(0) = g'(1) = 0, \qquad g(1) = 1.$$

En développant $g\left(\frac{1}{2}\right)$ autour de 0 puis de 1, montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|g''(c)| \geq 4$.

Corrigé détaillé

A.1. Majoration de la dérivée première. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, Taylor–Lagrange donne

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + r(x,h), \qquad |r(x,h)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}.$$

D'où

$$h|f'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + |r(x,h)|$$
$$\leq 2M_0 + \frac{M_2 h^2}{2}.$$

Comme $h > 0$,

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

A.2. Optimisation et cas limites. Supposons $M_0, M_2 > 0$ et posons

$$\varphi(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}, \qquad h > 0.$$

Alors

$$\varphi'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}.$$

Le minimum est atteint en

$$h_* = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}, \qquad \varphi(h_*) = 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Par conséquent,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Si $M_0 = 0$, alors $f \equiv 0$ et $f' \equiv 0$. Si $M_2 = 0$, alors $f'' \equiv 0$, donc f est affine ; sa bornitude sur $\mathbb{R}$ impose $f' \equiv 0$. L'inégalité reste vraie dans les deux cas.

B. Développements autour des extrémités. Posons $M = \max_{t\in[0,1]} |g''(t)|$. Taylor–Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et $\frac{1}{2}$ donne, puisque $g(0) = g'(0) = 0$,

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{g''(c_0)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad c_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

Ainsi

$$\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{M}{8}.$$

De même, au centre 1, avec $g(1) = 1$ et $g'(1) = 0$,

$$\left|g\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right| \le \frac{M}{8}.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$1 \le \left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|1 - g\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{M}{4}.$$

Donc $M \ge 4$. Puisque $|g''|$ atteint son maximum sur $[0,1]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$|g''(c)| = M \ge 4.$$

Exercice 10 – Méthode de Newton et erreur quadratique

Synthèse : convexité, suites et Taylor–Lagrange

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telles que $f(a) < 0 < f(b)$, $f' > 0$ et $f'' > 0$ sur $[a,b]$.

1. Montrer que f possède un unique zéro $\gamma \in]a,b[$.

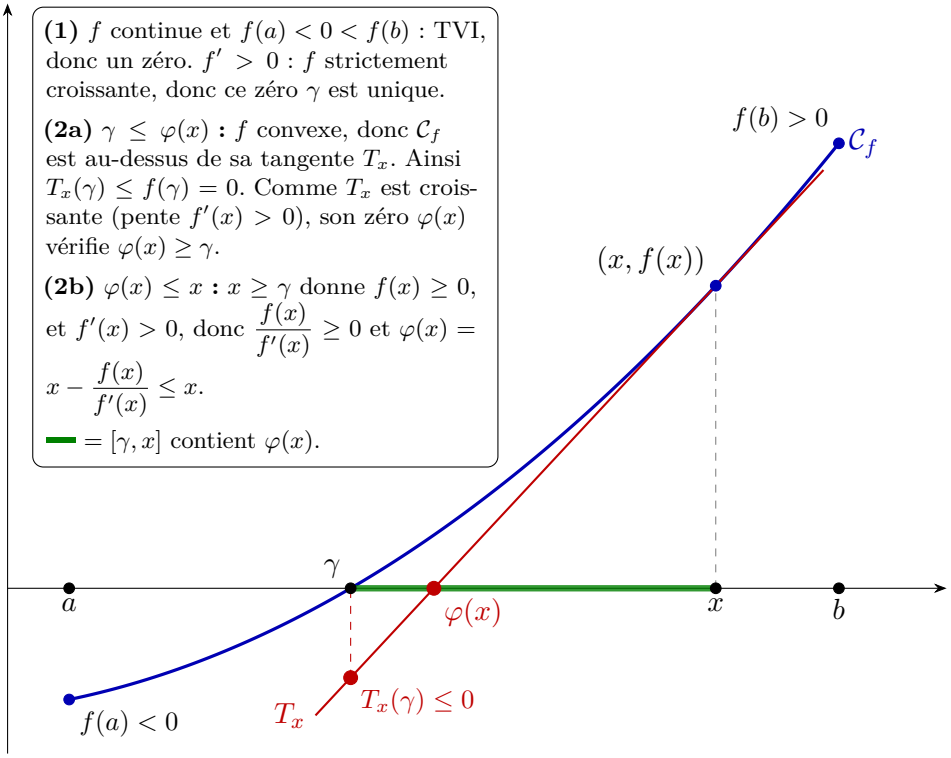
2. Pour $x \in [\gamma, b]$, justifier géométriquement et algébriquement

$$\gamma \le \varphi(x) \le x, \qquad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

3. Posons $x_0 = b$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Montrer que la suite est bien définie et converge vers γ.

4. Avec $m = \min_{[a,b]} f' > 0$, $M = \max_{[a,b]} |f''|$ et $K = \frac{M}{2m}$, établir

$$|x_{n+1} - \gamma| \le K|x_n - \gamma|^2, \quad K|x_n - \gamma| \le \left(K|x_0 - \gamma|\right)^{2^n}.$$



5. Appliquer à $f(x) = x^2 - 3$ sur $[1.7, 1.8]$: écrire la récurrence, calculer x_1 et x_2, puis montrer que x_3 approche $\sqrt{3}$ avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

Corrigé détaillé

1. Existence et unicité du zéro. Comme f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) < 0 < f(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires donne

$$\exists \gamma \in]a, b[, \qquad f(\gamma) = 0.$$

De plus, $f' > 0$ entraîne la stricte croissance de f. Le zéro γ est donc unique.

2. Encadrement de l'intersection tangentielle. Pour $x \in [\gamma, b]$, la tangente à la courbe en x est

$$(T_x) : y = f(x) + f'(x)(t - x).$$

Son intersection avec l'axe horizontal vérifie

$$t = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x).$$

Puisque $f(x) \ge f(\gamma) = 0$ et $f'(x) > 0$,

$$\varphi(x) \le x.$$

Par convexité de f,

$$f(\gamma) \ge f(x) + f'(x)(\gamma - x).$$

Ainsi

$$0 \ge f(x) + f'(x)(\gamma - x) \quad \Longrightarrow \quad \gamma \le x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On obtient

$$\gamma \le \varphi(x) \le x, \qquad x \in [\gamma, b].$$

3. Convergence de la méthode de Newton. Avec $x_0 = b$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, la question 2 montre par récurrence que

$$\gamma \leq x_{n+1} \leq x_n \leq b, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée par γ. Elle converge donc vers $\ell \in [\gamma, b]$. Comme $f' > 0$, la fonction φ est continue ; ainsi

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \varphi(\ell) = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}.$$

D'où $f(\ell) = 0$, puis $\ell = \gamma$.

4. Majoration quadratique de l'erreur. Taylor–Lagrange au centre x_n donne

$$0 = f(\gamma) = f(x_n) + f'(x_n)(\gamma - x_n) + r_n,$$

avec

$$|r_n| \leq \frac{M}{2}|x_n - \gamma|^2.$$

En utilisant la définition de x_{n+1},

$$x_{n+1} - \gamma = \frac{r_n}{f'(x_n)}.$$

Puisque $f'(x_n) \geq m > 0$, il vient

$$|x_{n+1} - \gamma| \leq \frac{M}{2m}|x_n - \gamma|^2 = K|x_n - \gamma|^2.$$

Posons $e_n = |x_n - \gamma|$. Alors

$$Ke_{n+1} \leq (Ke_n)^2.$$

Une récurrence sur n fournit

$$Ke_n \leq (Ke_0)^{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

5. Application à la racine carrée de 3. Pour $f(x) = x^2 - 3$ sur $[\frac{17}{10}, \frac{9}{5}]$,

$$f\left(\frac{17}{10}\right) = -\frac{11}{100} < 0, \quad f\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{6}{25} > 0,$$
$$f'(x) = 2x > 0, \qquad f''(x) = 2 > 0.$$

Ainsi $\gamma = \sqrt{3}$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right).$$

En partant de $x_0 = \frac{9}{5}$,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{5} + \frac{5}{3}\right) = \frac{26}{15},$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) = \frac{1351}{780}.$$

De plus,

$$m = \frac{17}{5}, \qquad M = 2, \qquad K = \frac{5}{17}.$$

Comme $\frac{17}{10} < \sqrt{3} < \frac{9}{5}$,

$$0 < e_0 = \frac{9}{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{10}, \qquad Ke_0 < \frac{1}{34}.$$

L'estimation de la question 4 donne

$$0 \leq x_3 - \sqrt{3} = e_3 \leq \frac{1}{K}(Ke_0)^8 < \frac{17}{5 \cdot 34^8} < 10^{-8}.$$

Ainsi x_3 est une approximation de $\sqrt{3}$ avec une erreur inférieure à 10^{-8}.