TRAVAUX DIRIGÉS / SÉRIE 3

Développements limités

Calculs, limites, régularité, courbes et suites implicites

Énoncés

Consigne. Justifier les réponses et préciser les hypothèses des résultats utilisés.

Exercice 1 – Développements usuels et changement de centre

Identifier la variable qui tend vers zéro

1. Écrire en 0 les développements limités de e^x à l'ordre 4, de $\sin x$ à l'ordre 5, de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 et de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.

2. Déterminer les DL d'ordre 3 de $\frac{1}{x}$ et $\ln x$ au centre 2, en posant $h = x - 2$.

3. Déterminer le DL d'ordre 3 de e^x au centre 1.

4. Expliquer pourquoi un DL en a s'écrit en puissances de $x - a$, et non simplement en puissances de x avec un reste $o(x^n)$.

Exercice 2 – Sommes et produits de développements limités

Tronquer après chaque opération

Déterminer en 0 :

1. le DL d'ordre 3 de $A(x) = \frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$;

2. le DL d'ordre 4 de $B(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$;

3. le DL d'ordre 4 de $C(x) = \cos x \, \ln(1+x)$.

Pour chaque calcul, écrire les développements utilisés et justifier l'ordre du reste. Vérifier la compatibilité du résultat de la question 2 avec la parité de B.

Exercice 3 – Quotients et annulations communes

Prévoir la perte d'ordre lors d'une division

Calculer en 0 :

1. le DL d'ordre 4 de $A(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$;

2. le DL d'ordre 5 de $\tan x$ en divisant ceux du sinus et du cosinus ;

3. le DL d'ordre 3 de $B(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$, pour $x \neq 0$ proche de 0.

Dans la dernière question, préciser le prolongement continu en 0 et expliquer pourquoi il faut disposer des DL du numérateur et du dénominateur jusqu'à l'ordre 4.

Exercice 4 – Composition et puissances variables

Passer par le logarithme lorsque l'exposant varie

Déterminer en 0 :

1. le DL d'ordre 4 de $A(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, définie pour $x \neq 0$ assez proche de 0 ;

2. le DL d'ordre 4 de $B(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$;

3. le DL d'ordre 5 de $C(x) = (\cos x)^{\sin x}$, définie près de 0 par $\exp(\sin x \ln(\cos x))$.

Préciser pourquoi les logarithmes utilisés sont définis et faire apparaître les puissances intermédiaires nécessaires.

Exercice 5 – Intégrer un développement limité

Retrouver une fonction à partir de sa dérivée

1. En utilisant $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, déterminer le DL d'ordre 5 de $\arccos x$ en 0.

2. Pour $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, calculer le DL d'ordre 5 en 0.

3. Justifier rigoureusement que si $r(t) = o(t^4)$ en 0, avec r intégrable près de 0, alors $\int_0^x r(t)\,\mathrm{d}t = o(x^5)$, pour $x \to 0$ des deux côtés.

Exercice 6 – Développement limité d'une fonction réciproque

Justifier l'existence puis identifier les coefficients

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. On note $g = f^{-1}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, impaire, et que $g'(0) = 1$.

3. Écrire le DL d'ordre 5 de f en 0.

4. En posant $g(y) = y + ay^3 + by^5 + o(y^5)$ et en utilisant $f(g(y)) = y$, déterminer a, b. Vérifier le résultat par composition.

Exercice 7 – Limites et paramètres

Repérer les compensations avant de choisir l'ordre

1. Calculer $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

2. Calculer $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \ln(1+x) - \mathrm{e}^x}{1 - \cos x}$.

3. Pour $a, b > 0$, déterminer $L_3 = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\alpha x} - 2}{x^2}$ admet une limite finie en 0, puis calculer cette limite.

Pour la question 3, utiliser le logarithme. Pour la question 4, examiner d'abord le terme d'ordre 1.

Exercice 8 – Raccordement et régularité en un point

Distinguer continuité, dérivabilité et classe C1

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x > 0, \\ ax + b, & x \leq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les couples (a, b) pour lesquels f est continue en 0.

2. Déterminer ceux pour lesquels f est dérivable en 0, puis donner $f'(0)$.

3. Pour ces derniers paramètres, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et sa limite en 0^+ sans dériver formellement un reste $o(x^n)$.

Exercice 9 – Tangente, point d'inflexion et asymptotes

Interpréter le premier terme non nul

A. Étude locale. Soit $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer son DL d'ordre 3 en 0 et déterminer la tangente au point d'abscisse 0.

2. Étudier la position locale de la courbe par rapport à cette tangente. Vérifier le changement de convexité en calculant le signe de f''.

B. Branches infinies. Soit $H(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$, définie pour $|x| \geq 1$.

3. En posant $u = \frac{1}{x}$, obtenir un développement asymptotique de H avec un reste $o\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$ aux deux infinis.

4. En déduire les asymptotes et la position de chaque branche par rapport à son asymptote. Confirmer cette position par une inégalité exacte.

Exercice 10 – Une suite définie implicitement

Synthèse : existence, équivalent et second terme

Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère l'équation

$$\mathrm{e}^x + x = n.$$

1. Montrer qu'elle possède une unique solution réelle u_n. Calculer u_1 et déterminer le signe de u_n pour $n \geq 2$.

2. Montrer que (u_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

3. Établir $0 < u_n < \ln n$ pour $n \geq 2$, puis justifier $u_n = \ln n + \ln\left(1 - \frac{u_n}{n}\right)$.

4. En déduire $u_n - \ln n \to 0$, puis $u_n \sim \ln n$.

5. À l'aide du DL de $\ln(1-z)$ en 0, montrer

$$\boxed{u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).}$$