TRAVAUX DIRIGÉS / SÉRIE 3

Développements limités

Calculs, limites, régularité, courbes et suites implicites

Énoncés et corrigés détaillés

Consigne. Justifier les réponses et préciser les hypothèses des résultats utilisés.

Exercice 1 – Développements usuels et changement de centre

Identifier la variable qui tend vers zéro

1. Écrire en 0 les développements limités de e^x à l'ordre 4, de $\sin x$ à l'ordre 5, de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 et de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.

2. Déterminer les DL d'ordre 3 de $\frac{1}{x}$ et $\ln x$ au centre 2, en posant $h = x - 2$.

3. Déterminer le DL d'ordre 3 de e^x au centre 1.

4. Expliquer pourquoi un DL en a s'écrit en puissances de $x - a$, et non simplement en puissances de x avec un reste $o(x^n)$.

Corrigé détaillé

1. Développements limités usuels au voisinage de 0. Les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 (on se place dans $]-1,1[$ pour le logarithme et la racine carrée). La formule de Taylor–Young s'applique donc à chacun des ordres demandés :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \qquad x \to 0.$$

Pour l'exponentielle, toutes les dérivées en 0 valent 1. Ainsi

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Pour le sinus, les dérivées successives en 0, jusqu'à l'ordre 5, sont $0, 1, 0, -1, 0, 1$. On en déduit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Pour $\ell(x) = \ln(1+x)$, on a $\ell(0) = 0$ et, pour $k \geq 1$,

$$\ell^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad \frac{\ell^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Par conséquent,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Enfin, si $s(x) = \sqrt{1+x}$, alors

$$s(0) = 1, \quad s'(0) = \frac{1}{2}, \quad s''(0) = -\frac{1}{4}, \quad s'''(0) = \frac{3}{8}.$$

En divisant chaque dérivée par la factorielle correspondante, il vient

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

2. Développements au centre 2. Posons $h = x - 2$. Lorsque $x \to 2$, on a $h \to 0$ et $x = 2 + h$. Il faut donc développer les fonctions de h au voisinage de 0. Pour la fonction inverse,

$$\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}.$$

La formule $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$, appliquée à $u = \frac{h}{2}$, donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o(h^3).\end{aligned}$$

De même, pour h assez proche de 0, $2 + h > 0$ et

$$\begin{aligned}\ln(2+h) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)\\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).\end{aligned}$$

Dans les deux calculs, le remplacement de u par $\frac{h}{2}$ transforme un reste $o(u^3)$ en un reste $o(h^3)$, car les deux échelles ne diffèrent que par une constante non nulle.

3. Développement de l'exponentielle au centre 1. Posons maintenant $h = x - 1$. Puisque $\mathrm{e}^{1+h} = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^h$, le DL usuel à l'ordre 3 donne

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{1+h} &= \mathrm{e}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)\\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}h + \frac{\mathrm{e}}{2}h^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}h^3 + o(h^3).\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à la variable x,

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big), \qquad x \to 1.$$

4. Rôle du changement de centre. Un DL d'ordre n au centre a est une écriture

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + r(x), \qquad \frac{r(x)}{(x-a)^n} \longrightarrow 0.$$

La petite quantité est $x - a$. Si $a \neq 0$, $x^n \to a^n \neq 0$: la condition $r(x) = o(x^n)$ exprimerait seulement $r(x) \to 0$, sans imposer la précision d'ordre n. On peut développer algébriquement le polynôme en puissances de x, mais il faut conserver le reste $o\big((x-a)^n\big)$ et préciser $x \to a$.

Exercice 2 – Sommes et produits de développements limités

Tronquer après chaque opération

Déterminer en 0 :

1. le DL d'ordre 3 de $A(x) = \frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$;

2. le DL d'ordre 4 de $B(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$;

3. le DL d'ordre 4 de $C(x) = \cos x\, \ln(1+x)$.

Pour chaque calcul, écrire les développements utilisés et justifier l'ordre du reste. Vérifier la compatibilité du résultat de la question 2 avec la parité de B.

Corrigé détaillé

1. DL de la différence A. Les deux fonctions sont définies au voisinage de 0. À l'ordre 3, on écrit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

La soustraction doit être effectuée coefficient par coefficient. Les termes constants et linéaires s'annulent, d'où

$$\begin{aligned} A(x) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{6}\right) x^3 + o(x^3) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

La différence de deux restes $o(x^3)$ est encore $o(x^3)$: le quotient de cette différence par x^3 tend vers 0.

2. DL de la somme B et vérification par la parité. Pour $|x| < 1$, les deux racines sont définies. Le DL binomial fournit

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \frac{5u^4}{128} + o(u^4).$$

En remplaçant successivement u par x et $-x$, il vient

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4),$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4).$$

En additionnant ces deux égalités, les coefficients de x et de x^3 s'annulent. Ainsi

$$B(x) = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4).$$

D'autre part,

$$B(-x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = B(x).$$

La fonction B est donc paire. Si P désigne la partie régulière de son DL, alors $P(x)$ et $P(-x)$ représentent tous deux ce même DL. Par unicité, $P(x) = P(-x)$; les coefficients impairs sont nécessairement nuls. Le calcul est donc cohérent avec la parité.

3. DL du produit C. Les développements à utiliser sont

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Dans le produit, on conserve uniquement les termes de degré inférieur ou égal à 4. Le terme $\frac{x^4}{24}$ du cosinus ne contribue pas à ces degrés, car le logarithme commence au degré 1. On obtient donc

$$\begin{aligned} C(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) x^4 + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

Pour justifier le reste, écrivons les deux DL sous la forme $P + r$ et $Q + s$, avec $r, s = o(x^4)$. Les polynômes P, Q sont bornés près de 0, donc $Ps, Qr, rs = o(x^4)$. Les termes polynomiaux de degré au moins 5 sont également $o(x^4)$. Le coefficient de degré 4 est nul, mais la précision obtenue est bien celle d'un DL d'ordre 4.

Exercice 3 – Quotients et annulations communes

Prévoir la perte d'ordre lors d'une division

Calculer en 0 :

1. le DL d'ordre 4 de $A(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$;

2. le DL d'ordre 5 de $\tan x$ en divisant ceux du sinus et du cosinus ;

3. le DL d'ordre 3 de $B(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$, pour $x \neq 0$ proche de 0.

Dans la dernière question, préciser le prolongement continu en 0 et expliquer pourquoi il faut disposer des DL du numérateur et du dénominateur jusqu'à l'ordre 4.

Corrigé détaillé

1. Inverse de $1 + x + x^2$. On remarque d'abord que

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Le quotient est donc défini, en particulier près de 0. L'identité

$$(1 - x)(1 + x + x^2) = 1 - x^3$$

permet d'écrire, pour x proche de 0,

$$A(x) = \frac{1 - x}{1 - x^3}.$$

La formule géométrique avec reste exact donne

$$\frac{1}{1 - x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{1 - x^3} = 1 + x^3 + o(x^4).$$

En effet, $\frac{x^6}{1-x^3} = O(x^6) = o(x^4)$. Par multiplication,

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 - x)(1 + x^3 + o(x^4)) \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Le facteur $1 - x$ étant borné près de 0, il conserve l'ordre du reste.

2. DL de la tangente par division. Puisque $\cos 0 = 1$, le cosinus ne s'annule pas sur un voisinage de 0. Pour obtenir $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ à l'ordre 5, on développe le sinus à l'ordre 5 et l'inverse du cosinus à l'ordre 4. Ce dernier ordre suffit car $\sin x = O(x)$. Posons

$$v(x) = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Alors $v(x) = O(x^2)$ et

$$v(x)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

En utilisant $\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 + o(v^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Le produit donne, en regroupant les puissances,

$$\begin{aligned}\tan x &= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).\end{aligned}$$

Ici, le reste $o(x^4)$ de l'inverse est multiplié par un facteur $O(x)$: sa contribution est $o(x^5)$. Le reste du sinus est multiplié par un facteur borné et reste $o(x^5)$. Il n'est donc pas nécessaire d'affirmer un DL d'ordre 5 pour l'inverse du cosinus.

3. Quotient présentant une annulation commune. Pour $x \neq 0$ assez proche de 0, $1 + x > 0$ et $\sin x \neq 0$. Le quotient B est donc défini. Les DL d'ordre 4 sont

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),\\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

On factorise x au numérateur et au dénominateur :

$$B(x) = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

Le nouveau dénominateur tend vers 1. En posant $w = -\frac{x^2}{6} + o(x^3)$, on a $w = O(x^2)$ et

$$\frac{1}{1+w} = 1 - w + O(w^2) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}B(x) &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)x^3 + o(x^3)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

On en déduit $\lim_{x\to 0} B(x) = 1$. Le prolongement continu est donc obtenu en posant $B(0) = 1$. Enfin, la division par x remplace $o(x^4)$ par $o(x^3)$. Pour garantir le résultat demandé par cette méthode, il faut donc connaître les développements initiaux jusqu'à l'ordre 4, y compris les coefficients nuls du sinus.

Exercice 4 – Composition et puissances variables

Passer par le logarithme lorsque l'exposant varie

Déterminer en 0 :

1. le DL d'ordre 4 de $A(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, définie pour $x \neq 0$ assez proche de 0 ;

2. le DL d'ordre 4 de $B(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$;

3. le DL d'ordre 5 de $C(x) = (\cos x)^{\sin x}$, définie près de 0 par $\exp(\sin x \ln(\cos x))$.

Préciser pourquoi les logarithmes utilisés sont définis et faire apparaître les puissances intermédiaires nécessaires.

Corrigé détaillé

1. Logarithme du quotient $\frac{\sin x}{x}$. On sait que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$. Ce quotient est donc strictement positif pour $x \neq 0$ assez proche de 0 ; son logarithme est bien défini. Pour obtenir le quotient à l'ordre 4, on part du DL du sinus à l'ordre 5 :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Posons

$$u(x) = \frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Comme $u = O(x^2)$, seuls les termes u et u^2 peuvent contribuer jusqu'au degré 4. En effet,

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4), \qquad o(u^2) = o(x^4).$$

Le DL $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ entraîne alors

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4). \end{aligned}$$

Le coefficient de x^4 vaut bien $\frac{1}{120} - \frac{1}{72} = -\frac{1}{180}$. On pourrait prolonger A en 0 par $A(0) = 0$.

2. Exponentielle du sinus. Posons $v = \sin x$. À l'ordre 4,

$$v = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad v \sim x.$$

Calculons les puissances nécessaires avant de les substituer dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned} v^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \\ v^3 &= x^3 + o(x^4), \\ v^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Par exemple, dans v^2, le terme de degré 4 est le double produit $2x\left(-\frac{x^3}{6}\right) = -\frac{x^4}{3}$; les autres termes sont d'ordre strictement supérieur à 4. En utilisant

$$\mathrm{e}^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + \frac{v^4}{24} + o(v^4),$$

on obtient, puisque $o(v^4) = o(x^4)$,

$$\begin{aligned} B(x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

Les contributions de degré 3 se compensent exactement.

3. Puissance à exposant variable. Pour $|x| < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos x > 0$. On peut donc écrire

$$C(x) = \exp\big(\sin x \ln(\cos x)\big).$$

Commençons par le logarithme. Avec

$$q = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \qquad q^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

la formule du logarithme donne

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= q - \frac{q^2}{2} + o(q^2)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)\\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).\end{aligned}$$

On multiplie par $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$:

$$\begin{aligned}w(x) := \sin x \ln(\cos x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)\\ &= -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{12} + o(x^5)\\ &= -\frac{x^3}{2} + o(x^5).\end{aligned}$$

Le reste du sinus est multiplié par $O(x^2)$ et celui du logarithme par $O(x)$: les deux contributions sont donc $o(x^5)$. Enfin, $w = O(x^3)$ et Taylor à l'ordre 1 pour l'exponentielle, avec reste majoré, donne

$$\mathrm{e}^w = 1 + w + O(w^2), \qquad O(w^2) = O(x^6) = o(x^5).$$

Il en résulte

$$C(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5).$$

La disparition du terme de degré 5 a été vérifiée dans le produit ; elle ne pouvait pas être supposée à l'avance.

Exercice 5 – Intégrer un développement limité

Retrouver une fonction à partir de sa dérivée

1. En utilisant $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, déterminer le DL d'ordre 5 de $\arccos x$ en 0.

2. Pour $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, calculer le DL d'ordre 5 en 0.

3. Justifier rigoureusement que si $r(t) = o(t^4)$ en 0, avec r intégrable près de 0, alors $\int_0^x r(t)\,\mathrm{d}t = o(x^5)$, pour $x \to 0$ des deux côtés.

Corrigé détaillé

1. Développement de l'arccosinus. La fonction arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour déterminer la fonction à l'ordre 5, on développe sa dérivée à l'ordre 4. Le DL binomial fournit

$$(1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2).$$

En posant $u = x^2$, on en déduit

$$(\arccos x)' = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + o(x^4).$$

Puisque $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, le théorème fondamental de l'analyse donne

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} + \int_0^x (\arccos t)' \, \mathrm{d}t.$$

L'intégration du reste est justifiée à la question 3. En intégrant chaque monôme,

$$\begin{aligned} \arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + o(x^5) \\ &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5). \end{aligned}$$

La constante $\frac{\pi}{2}$ provient de la valeur en 0 ; elle ne doit pas être oubliée lorsqu'on retrouve une fonction à partir de sa dérivée.

2. Développement de la primitive F. À partir de $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on remplace u par t^2 :

$$\mathrm{e}^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4), \qquad t \to 0.$$

La fonction intégrée est continue. En intégrant entre 0 et x,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right) \mathrm{d}t + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5). \end{aligned}$$

Ici, la constante vaut 0 puisque $F(0) = 0$. La fonction e^{t^2} est paire, donc sa primitive qui s'annule en 0 est impaire : l'absence de termes de degré pair fournit une vérification du calcul.

3. Justification du reste intégré, à droite et à gauche. Soit r intégrable sur un voisinage de 0 et telle que $r(t) = o(t^4)$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < |t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |r(t)| \leq \varepsilon |t|^4.$$

On peut redéfinir $r(0) = 0$ sans modifier l'intégrale. Pour $0 < x < \delta$,

$$\left| \int_0^x r(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^x |r(t)| \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_0^x t^4 \, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon x^5}{5}.$$

Si $-\delta < x < 0$, on inverse les bornes avant de majorer :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x r(t) \, \mathrm{d}t \right| &= \left| \int_x^0 r(t) \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \varepsilon \int_x^0 |t|^4 \, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon |x|^5}{5}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas,

$$0 \leq \frac{\left| \int_0^x r(t) \, \mathrm{d}t \right|}{|x|^5} \leq \frac{\varepsilon}{5}.$$

Comme ε est arbitraire, ce quotient tend vers 0. Par conséquent,

$$\int_0^x r(t) \, \mathrm{d}t = o(x^5), \qquad x \to 0.$$

C'est cette estimation qui autorise l'intégration des DL dans les deux premières questions ; aucune dérivation formelle d'un reste n'est utilisée.

Exercice 6 – Développement limité d'une fonction réciproque

Justifier l'existence puis identifier les coefficients

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. On note $g = f^{-1}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, impaire, et que $g'(0) = 1$.

3. Écrire le DL d'ordre 5 de f en 0.

4. En posant $g(y) = y + ay^3 + by^5 + o(y^5)$ et en utilisant $f(g(y)) = y$, déterminer a, b. Vérifier le résultat par composition.

Corrigé détaillé

1. Existence d'une réciproque sur $\mathbb{R}$. La fonction $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x^2}(1 + 2x^2) > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\mathrm{e}^{x^2} \geq 1$: pour $x \geq 0$, $f(x) \geq x$, et pour $x \leq 0$, $f(x) \leq x$. Ainsi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Par continuité et stricte monotonie, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque g est continue et strictement croissante. Comme $f(0) = 0$, on a $g(0) = 0$.

2. Dérivabilité, régularité et imparité de g. Fixons $y_0 \in \mathbb{R}$ et posons $x_0 = g(y_0)$. Lorsque $y \to y_0$, la continuité de g donne $g(y) \to x_0$. Pour $y \neq y_0$, l'injectivité assure $g(y) \neq x_0$ et

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(g(y)) - f(x_0)}{g(y) - x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Le dénominateur limite est non nul. On a donc

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\mathrm{e}^{g(y)^2}(1 + 2g(y)^2)}, \qquad g'(0) = 1.$$

Pour justifier toute la régularité, posons $\Phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$. La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car f' ne s'annule jamais. L'identité $g' = \Phi \circ g$ montre d'abord que g' est continue, donc $g \in \mathcal{C}^1$. Si $g \in \mathcal{C}^k$, alors $g' = \Phi \circ g \in \mathcal{C}^k$, d'où $g \in \mathcal{C}^{k+1}$. Par récurrence, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Enfin, f est impaire. Pour tout y,

$$f(-g(y)) = -f(g(y)) = -y = f(g(-y)).$$

L'injectivité de f donne $g(-y) = -g(y)$: g est impaire.

3. DL de f à l'ordre 5. On utilise le DL de l'exponentielle à l'ordre 2, avec $u = x^2$:

$$\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

La multiplication par x donne

$$f(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

Le reste est bien $o(x^5)$, puisque $x\,o(x^4) = o(x^5)$.

4. Identification des coefficients du DL de g. La régularité de g permet d'appliquer Taylor–Young à l'ordre 5. Son imparité annule les coefficients pairs, tandis que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$g(y) = y + ay^3 + by^5 + o(y^5).$$

En particulier, $g(y) \sim y$. On calcule

$$\begin{aligned} g(y)^3 &= y^3 + 3ay^5 + o(y^5), \\ g(y)^5 &= y^5 + o(y^5). \end{aligned}$$

Dans la première ligne, le seul terme supplémentaire de degré au plus 5 est $3y^2(ay^3) = 3ay^5$. De plus, le reste $o(g(y)^5)$ provenant de la composition est $o(y^5)$, car $\frac{g(y)}{y} \to 1$. En substituant dans le DL de f,

$$\begin{aligned} f(g(y)) &= g(y) + g(y)^3 + \frac{g(y)^5}{2} + o(y^5) \\ &= y + (a+1)y^3 + \left(b + 3a + \frac{1}{2}\right) y^5 + o(y^5). \end{aligned}$$

Or $f(g(y)) = y$. L'unicité du DL impose

$$a + 1 = 0, \qquad b + 3a + \frac{1}{2} = 0.$$

Ainsi $a = -1$ et $b = \frac{5}{2}$, et finalement

$$g(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5 + o(y^5).$$

Pour vérifier les coefficients, posons $P(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5$. Alors

$$\begin{aligned} f(P(y)) &= \left(y - y^3 + \frac{5}{2}y^5\right) + \left(y^3 - 3y^5\right) + \frac{y^5}{2} + o(y^5) \\ &= y + o(y^5). \end{aligned}$$

Cette vérification confirme les calculs. L'existence du DL de la réciproque avait été justifiée auparavant par sa régularité.

Exercice 7 – Limites et paramètres

Repérer les compensations avant de choisir l'ordre

1. Calculer $L_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

2. Calculer $L_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \ln(1+x) - \mathrm{e}^x}{1 - \cos x}$.

3. Pour $a, b > 0$, déterminer $L_3 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\alpha x} - 2}{x^2}$ admet une limite finie en 0, puis calculer cette limite.

Pour la question 3, utiliser le logarithme. Pour la question 4, examiner d'abord le terme d'ordre 1.

Corrigé détaillé

1. Limite obtenue à partir du sinus. Le numérateur $\sin x - x$ présente une compensation du terme linéaire. Le dénominateur étant x^3, on utilise le DL d'ordre 3 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

Par conséquent, $L_1 = -\frac{1}{6}$.

2. Quotient de deux annulations quadratiques. Au voisinage de 0, $1 + x > 0$. On écrit les DL à l'ordre 2 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Les termes constants et linéaires du numérateur s'annulent. Il vient

$$1 + \ln(1+x) - \mathrm{e}^x = -x^2 + o(x^2),$$
$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Après division du numérateur et du dénominateur par x^2,

$$\frac{1 + \ln(1+x) - \mathrm{e}^x}{1 - \cos x} = \frac{-1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} \longrightarrow -2.$$

Le dénominateur réduit tend vers $\frac{1}{2} \neq 0$, ce qui justifie le passage à la limite. Ainsi $L_2 = -2$.

3. Limite d'une puissance variable. Comme $a, b > 0$, posons $A = \ln a$ et $B = \ln b$. La base

$$m(x) = \frac{a^x + b^x}{2} = \frac{\mathrm{e}^{Ax} + \mathrm{e}^{Bx}}{2}$$

est strictement positive. Pour $x \neq 0$, la puissance réelle se définit donc par

$$m(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln m(x)}{x}\right).$$

Les DL d'ordre 1 des deux exponentielles donnent

$$m(x) = 1 + \frac{A+B}{2}x + o(x).$$

Posons $u(x) = m(x) - 1$. On a $u = O(x)$ et $u \to 0$. Comme $\ln(1+u) = u + O(u^2)$, on obtient

$$\ln m(x) = \frac{A+B}{2}x + o(x),$$

car $O(u^2) = O(x^2) = o(x)$. Cet argument reste valable lorsque $A + B = 0$: il ne nécessite pas d'équivalent non nul de u. Par conséquent,

$$\frac{\ln m(x)}{x} \longrightarrow \frac{A+B}{2}.$$

La continuité de l'exponentielle entraîne alors

$$L_3 = \exp\left(\frac{\ln a + \ln b}{2}\right) = \sqrt{ab}.$$

Le raisonnement s'applique pour $x \to 0^+$ comme pour $x \to 0^-$.

4. Choix du paramètre pour obtenir une limite finie. Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$. Les DL à l'ordre 2 donnent

$$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
$$\mathrm{e}^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2).$$

La seconde égalité reste vraie si $\alpha = 0$, l'exponentielle étant alors identiquement égale à 1. En additionnant puis en divisant par x^2, on trouve

$$\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{\alpha x} - 2}{x^2} = \frac{1+\alpha}{x} + \frac{1+\alpha^2}{2} + o(1).$$

Si $1 + \alpha \neq 0$, le premier terme diverge et les deux limites unilatérales sont infinies de signes opposés. Aucune limite finie en 0 n'est possible. La condition nécessaire est donc $\alpha = -1$. Pour cette valeur, le terme divergent disparaît et

$$\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2}{x^2} = 1 + o(1) \longrightarrow 1.$$

Ainsi la limite est finie si et seulement si $\alpha = -1$, et elle vaut alors 1.

Exercice 8 – Raccordement et régularité en un point

Distinguer continuité, dérivabilité et classe C1

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x > 0, \\ ax + b, & x \leq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les couples (a, b) pour lesquels f est continue en 0.

2. Déterminer ceux pour lesquels f est dérivable en 0, puis donner $f'(0)$.

3. Pour ces derniers paramètres, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et sa limite en 0^+ sans dériver formellement un reste $o(x^n)$.

Corrigé détaillé

1. Condition de continuité en 0. La branche affine vérifie $f(0) = b$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = b$. Pour la limite à droite, on développe le logarithme à l'ordre 4 :

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

En divisant par x^2, pour $x > 0$,

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Il en résulte $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$. Les deux limites unilatérales coïncident avec $f(0)$ si et seulement si $b = -\frac{1}{2}$. L'ensemble des couples convenables est donc

$$\left\{ \left(a, -\frac{1}{2}\right) : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le paramètre a n'intervient pas dans la continuité.

2. Condition de dérivabilité et valeur de la dérivée. Si f est dérivable en 0, elle y est continue : il faut donc commencer par imposer $b = -\frac{1}{2}$. À droite, le taux d'accroissement s'écrit alors

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}{x} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + o(x) \longrightarrow \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

À gauche, pour $x < 0$, le calcul est exact :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{ax+b-b}{x} = a.$$

La dérivée en 0 existe exactement lorsque ces deux limites sont égales, soit

$$a = \frac{1}{3}, \qquad b = -\frac{1}{2}.$$

Pour ce couple, on a $f'(0) = \frac{1}{3}$.

3. Dérivation exacte sur $]0,+\infty[$. On fixe désormais les paramètres précédents. Pour $x < 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{3}$. Sur $]0,+\infty[$, posons $q(x) = \ln(1+x) - x$. Alors

$$q'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

La règle de dérivation d'un quotient donne

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2 q'(x) - 2xq(x)}{x^4} \\ &= \frac{xq'(x) - 2q(x)}{x^3} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{1+x} - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3}.\end{aligned}$$

Cette formule provient des fonctions exactes, et non de la dérivation du reste du DL de f.

4. Continuité de f' au point de raccordement. Pour déterminer la limite de $f'(x)$ en 0^+, il faut développer son numérateur à l'ordre 3. D'une part, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, donc

$$-\frac{x^2}{1+x} = -x^2 + x^3 + o(x^3).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}-2\ln(1+x) + 2x &= -2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + 2x \\ &= x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

Les termes quadratiques s'annulent. Ainsi

$$-\frac{x^2}{1+x} - 2\ln(1+x) + 2x = \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

puis

$$f'(x) = \frac{1}{3} + o(1) \longrightarrow \frac{1}{3} = f'(0).$$

À gauche, f' est constante et égale à cette même valeur. Elle est donc continue en 0. Les expressions de f' sont déjà continues sur les deux demi-droites ouvertes. On conclut que

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad (a,b) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right).$$

La dérivabilité et la continuité de la dérivée ont été établies séparément : l'existence d'un DL de f ne permet pas, à elle seule, de dériver formellement son reste.

Exercice 9 – Tangente, point d'inflexion et asymptotes

Interpréter le premier terme non nul

A. Étude locale. Soit $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer son DL d'ordre 3 en 0 et déterminer la tangente au point d'abscisse 0.

2. Étudier la position locale de la courbe par rapport à cette tangente. Vérifier le changement de convexité en calculant le signe de f''.

B. Branches infinies. Soit $H(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$, définie pour $|x| \geq 1$.

3. En posant $u = \frac{1}{x}$, obtenir un développement asymptotique de H avec un reste $o\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$ aux deux infinis.

4. En déduire les asymptotes et la position de chaque branche par rapport à son asymptote. Confirmer cette position par une inégalité exacte.

Corrigé détaillé

A.1. DL au centre 0 et équation de la tangente. La fonction $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car son dénominateur est strictement positif. Elle admet donc un DL d'ordre 3 en 0. Écrivons

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3).$$

Comme $(1+\mathrm{e}^x)f(x) = 1$ et

$$1 + \mathrm{e}^x = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

l'identification des coefficients donne successivement

$$\begin{cases} 2a_0 = 1, \\ 2a_1 + a_0 = 0, \\ 2a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2} = 0, \\ 2a_3 + a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6} = 0. \end{cases}$$

On obtient $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{4}$ et $a_2 = 0$. La dernière équation devient

$$2a_3 - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a_3 = \frac{1}{48}.$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3).$$

On lit $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -\frac{1}{4}$. La tangente au point $M = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ a donc pour équation

$$T : \qquad y = f(0) + x f'(0) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}.$$

A.2. Position par rapport à la tangente et changement de convexité. La différence entre la courbe et la tangente est

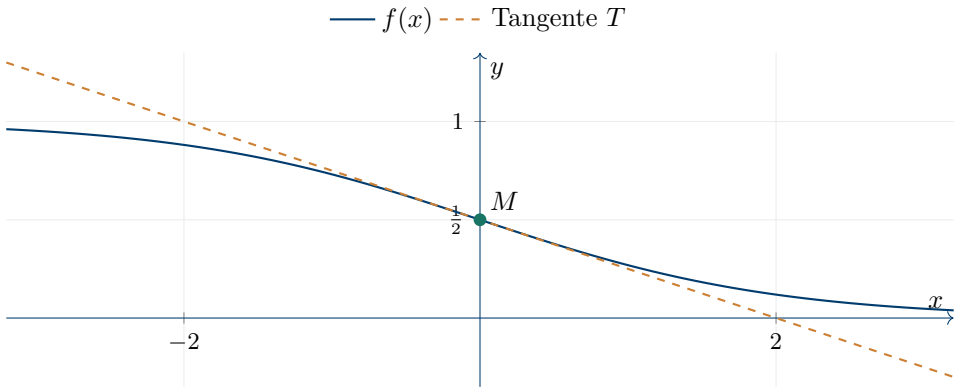
$$f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) = \frac{x^3}{48} + o(x^3) = x^3\left(\frac{1}{48} + o(1)\right).$$

Le facteur entre parenthèses est strictement positif pour x assez proche de 0. La différence a donc le signe de x : la courbe est localement au-dessous de T à gauche de 0, et au-dessus à droite. Pour vérifier la convexité, on dérive les expressions exactes :

$$f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}. \end{aligned}$$

Les facteurs e^x et $(1+\mathrm{e}^x)^3$ sont positifs. Ainsi $f''(x)$ a le signe de $\mathrm{e}^x - 1$, donc celui de x. La fonction est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$. Il y a bien un changement de convexité en M, qui est un point d'inflexion.



La courbe traverse sa tangente au point d'inflexion.

B.1. Développement asymptotique aux deux infinis. Pour $|x| \geq 1$, on factorise x^2 sous chacune des racines. Il faut conserver $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$H(x) = |x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right).$$

Posons $u = \frac{1}{x}$; alors $u \to 0$ aux deux infinis. Les DL binomiaux donnent

$$\begin{aligned} \sqrt{1+u^2} &= 1 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8} + o(u^4), \\ \sqrt{1-u^2} &= 1 - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8} + o(u^4). \end{aligned}$$

Le terme de degré 2 s'annule dans la somme. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H(x) &= |x| \left(2 - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \right) \\ &= 2|x| - \frac{1}{4|x|^3} + o\left(\frac{1}{|x|^3}\right). \end{aligned}$$

En effet, $|x|u^4 = \frac{1}{|x|^3}$ et la multiplication du reste par $|x|$ donne précisément l'ordre annoncé.

B.2. Asymptotes et position des branches. Lorsque $x \to +\infty$, $|x| = x$ et

$$H(x) - 2x = -\frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \longrightarrow 0.$$

La droite $y = 2x$ est donc une asymptote à droite ; la différence est négative pour x assez grand. Lorsque $x \to -\infty$, $|x| = -x$ et

$$H(x) + 2x = -\frac{1}{4|x|^3} + o\left(\frac{1}{|x|^3}\right) \longrightarrow 0.$$

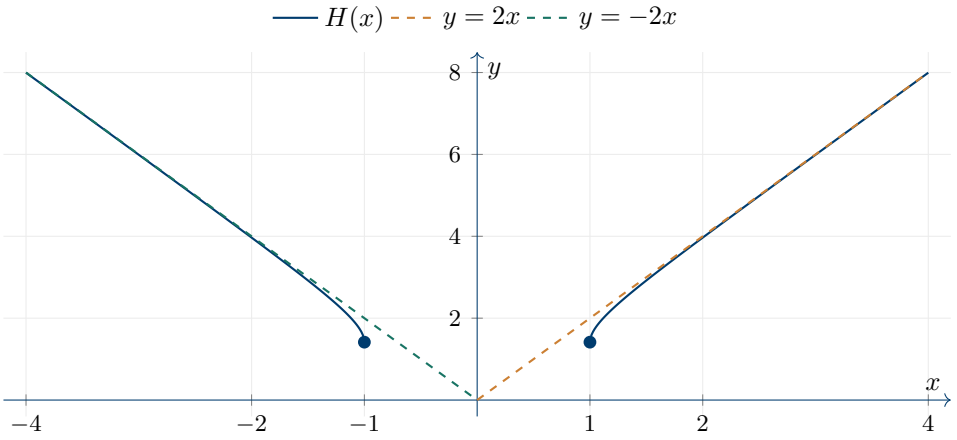
L'asymptote à gauche est $y = -2x$, et la branche est également au-dessous de cette droite. Pour confirmer la position sur tout le domaine, calculons exactement

$$\begin{aligned} H(x)^2 &= (x^2+1) + (x^2-1) + 2\sqrt{(x^2+1)(x^2-1)} \\ &= 2x^2 + 2\sqrt{x^4-1} < 4x^2. \end{aligned}$$

L'inégalité est stricte car $\sqrt{x^4-1} < \sqrt{x^4} = x^2$. Puisque $H(x)$ et $2|x|$ sont positifs, il en résulte

$$H(x) < 2|x| \qquad (|x| \geq 1).$$

Chaque branche est donc au-dessous de son asymptote sur la totalité de son intervalle de définition.



Deux branches symétriques, situées sous leurs asymptotes respectives.

Exercice 10 – Une suite définie implicitement

Synthèse : existence, équivalent et second terme

Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère l'équation

$$\mathrm{e}^x + x = n.$$

1. Montrer qu'elle possède une unique solution réelle u_n. Calculer u_1 et déterminer le signe de u_n pour $n \geq 2$.

2. Montrer que (u_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

3. Établir $0 < u_n < \ln n$ pour $n \geq 2$, puis justifier $u_n = \ln n + \ln\left(1 - \frac{u_n}{n}\right)$.

4. En déduire $u_n - \ln n \to 0$, puis $u_n \sim \ln n$.

5. À l'aide du DL de $\ln(1-z)$ en 0, montrer

$$\boxed{u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).}$$

Corrigé détaillé

1. Existence, unicité et signe de la solution. Considérons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $F(x) = \mathrm{e}^x + x$. Elle est continue et dérivable, avec

$$F'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0.$$

Elle est donc strictement croissante. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires donne, pour tout $n \geq 1$, l'existence d'une solution de $F(x) = n$. La stricte croissance en assure l'unicité ; on la note u_n. Comme $F(0) = 1$, on a $u_1 = 0$. Pour $n \geq 2$,

$$F(u_n) = n > 1 = F(0),$$

et la stricte croissance de F entraîne $u_n > 0$.

2. Croissance et divergence de la suite. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$F(u_{n+1}) = n + 1 > n = F(u_n).$$

Puisque F est strictement croissante, on en déduit $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc strictement croissante. Si elle était majorée, le théorème de convergence monotone donnerait une limite réelle ℓ. Par continuité de F,

$$F(u_n) \longrightarrow F(\ell) \in \mathbb{R}.$$

Cela contredit l'égalité $F(u_n) = n$, dont le membre de droite tend vers $+\infty$. Ainsi la suite n'est pas majorée ; étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

3. Encadrement et identité logarithmique. Pour $n \geq 2$, on sait que $u_n > 0$. L'équation de définition donne

$$\mathrm{e}^{u_n} = n - u_n < n.$$

En appliquant la fonction logarithme, strictement croissante, on obtient

$$0 < u_n < \ln n.$$

Par ailleurs, $n - u_n = \mathrm{e}^{u_n} > 0$. On peut donc prendre son logarithme et factoriser n :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n - u_n) \\ &= \ln\left(n\left(1 - \frac{u_n}{n}\right)\right) \\ &= \ln n + \ln\left(1 - \frac{u_n}{n}\right). \end{aligned}$$

Le logarithme du second facteur est licite car $1 - \frac{u_n}{n} > 0$.

4. Différence avec $\ln n$ et équivalent. L'encadrement précédent entraîne

$$0 < \frac{u_n}{n} < \frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0.$$

Par le théorème des gendarmes, $\frac{u_n}{n} \to 0$. La continuité du logarithme en 1 donne alors

$$u_n - \ln n = \ln\left(1 - \frac{u_n}{n}\right) \longrightarrow \ln 1 = 0.$$

On dispose donc de l'information précise $u_n = \ln n + o(1)$. Comme $\ln n \to +\infty$, on peut écrire

$$\frac{u_n}{\ln n} = 1 + \frac{u_n - \ln n}{\ln n} \longrightarrow 1.$$

Ainsi $u_n \sim \ln n$.

5. Détermination du second terme. Posons $z_n = \frac{u_n}{n}$. On a $z_n \to 0^+$ et, par la question précédente,

$$z_n \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Le DL $\ln(1-z) = -z + o(z)$ en 0 donne

$$u_n - \ln n = -\frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right).$$

Pour justifier rigoureusement le remplacement de l'échelle du reste, divisons par $\frac{\ln n}{n} > 0$:

$$\frac{u_n - \ln n}{\frac{\ln n}{n}} = \frac{u_n}{\ln n}\left(-1 + o(1)\right) \longrightarrow -1.$$

Autrement dit,

$$u_n - \ln n = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

On obtient finalement

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), \qquad n \to +\infty.$$

Le second terme est négatif, en accord avec l'encadrement $u_n < \ln n$. La démarche procède dans l'ordre : montrer que $z_n \to 0$, appliquer le DL, puis utiliser l'équivalent déjà établi pour exprimer le résultat uniquement en fonction de n.