UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :
Sciences de la Matière Physique
PC- S_4

Analyse Numérique

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma

Remarque importante

Ce document est un **cours complémentaire**, destiné uniquement à accompagner la correction des travaux dirigés (TD). Il ne se substitue **en aucun cas** au cours magistral dispensé par le **professeur responsable de la matière**. L'auteur de ce document assure uniquement les **séances de TD**.

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025–2026**

Table des matières

1 Rappels sur les matrices **1**

1.1 Notations et définitions générales 1

1.1.1 Transposée d'une matrice 1

1.1.2 Trace 2

1.1.3 Déterminant 2

1.2 Inverse d'une matrice 3

1.2.1 Règles de calcul sur les inverses 3

1.2.2 Caractérisation d'une matrice inversible 4

1.2.3 Sous-matrices principales 4

1.3 Valeurs propres, vecteurs propres 4

1.3.1 Définitions générales 4

1.3.2 Cas des matrices réelles ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) 5

1.4 Normes vectorielles et matricielles 5

1.4.1 Norme vectorielle 5

1.4.2 Norme matricielle 6

1.4.3 Normes matricielles classiques 6

1.5 Matrices définies positives 7

Symboles et Abréviations

Symbole	Description / Signification
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	Matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$	Matrices de type (m, n) sur $\mathbb{K}$
I_n	Matrice identité d'ordre n
a_{ij}	Coefficient ligne i, colonne j de A
$\overline{z}$	Conjugué complexe du scalaire $z \in \mathbb{C}$
A^T ou ${}^tA$	Transposée de A : $(A^T)_{ij} = a_{ji}$
A^*	Adjointe de A : $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\quad A^* = \overline{A^T}$
$\mathrm{tr}(A)$	Trace de A : somme des termes diagonaux $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
$\det(A)$	Déterminant de A
A^{-1}	Inverse de A : unique matrice vérifiant $AB = BA = I_n$
$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$	Polynôme caractéristique de A
$\mathrm{sp}(A)$	Spectre de A
λ_i	Valeurs propres de A
$\rho(A) = \max_i \lvert\lambda_i\rvert$	Rayon spectral de A
$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$	Sous-espace propre associé à $\lambda \quad (Ax = \lambda x,\ x \neq 0)$
$\lVert\cdot\rVert,\ \lvert\!\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert\!\rvert$	Norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$; norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_1,\ \lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_\infty$	Norme 1 (max sommes colonnes) ; norme ∞ (max sommes lignes)
$\rho(A) = \max_i \lvert\lambda_i\rvert$	Rayon spectral de A
$\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$	Norme spectrale ; si $A^*A = AA^*$ alors $\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_2 = \rho(A)$
DSD	Matrice à Diagonale Strictement Dominante
SDP	Matrice Symétrique Définie Positive

Les notations suivent les conventions standards de l'Analyse Numérique.

Chapitre 1

Rappels sur les matrices

1.1 Notations et définitions générales

Définition 1.1.1: - Matrice de type (m, n)

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice de type** (m, n) sur $\mathbb{K}$ est un tableau de scalaires (réels ou complexes) à m lignes et n colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On adopte les conventions de notation suivantes :

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble de toutes les matrices de type (m, n) sur $\mathbb{K}$.
- Lorsque $m = n$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des **matrices carrées** d'ordre n sur $\mathbb{K}$.
- Le coefficient de la matrice A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est noté A_{ij} (ou a_{ij}).

1.1.1 Transposée d'une matrice

Définition 1.1.2: Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) sur $\mathbb{K}$. La **transposée** de la matrice A, notée A^T (ou ${}^tA$), est la matrice de type (n, m) obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de A^T est le coefficient de la j-ème ligne et i-ème colonne de A :

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Ainsi :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Définition 1.1.3: Matrice adjointe (ou transconjuguée) dans $\mathbb{C}$

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. La **matrice adjointe** (ou transposée conjuguée) de A, notée A^*, est la matrice de type (n, m) obtenue en calculant la transposée de A, puis en remplaçant chaque coefficient par son conjugué complexe. Le coefficient d'indice (i, j) de A^* vérifie :

$$(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Ainsi, on a $A^* = \overline{A^T}$:

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

1.1.2 Trace

Définition 1.1.4: Trace d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de coefficients $(a_{ij}) \in \mathbb{K}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$. Sa **trace** est la somme de ses termes diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propriété 1.1.1: de la trace

Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), \qquad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

1.1.3 Déterminant

Définition 1.1.5: Déterminant

Le **déterminant** d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\det(A)$ ou

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Il est défini par la formule :

$$\det A \ = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

où S_n est le **groupe des permutations** (bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même), et $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, +1\}$ est la **signature** de la permutation σ.

Propriété 1.1.2: du déterminant

1. $\det I_n = 1$,
2. $\det A^T = \det A$,
3. $\det A^* = \overline{\det A}$,
4. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
5. Pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$: $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$,
6. Le déterminant d'une matrice **triangulaire** (et *a fortiori* diagonale) est égal au **produit de ses termes diagonaux** :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1.2 Inverse d'une matrice

Définition 1.2.1: Matrice inversible

On dit que la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B est appelée **inverse** de A et est notée A^{-1}.

1.2.1 Règles de calcul sur les inverses

Propriété 1.2.1: Opérations sur les inverses

Pour toutes matrices inversibles A et B de même taille :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T, \qquad \left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

1.2.2 Caractérisation d'une matrice inversible

Propriété 1.2.2: Équivalences

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible,
2. $\det A \neq 0$,
3. Le système $Ax = 0$ admet pour seule solution $x = 0$,
4. Pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $Ax = b$ possède une **unique** solution.

1.2.3 Sous-matrices principales

Définition 1.2.2:

Les **Sous-matrices principales** A_k de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les sous-matrices obtenues en ne conservant que les k premières lignes **et** les k premières colonnes :

$$A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Autrement dit, A_k est le **coin supérieur gauche** de taille $k \times k$ de A.

Définition 1.2.3: Matrice à diagonale strictement dominante

Une matrice carrée $\mathbf{A} = (a_{ij})$ est dite *à diagonale strictement dominante* si et seulement si

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

1.3 Valeurs propres, vecteurs propres

1.3.1 Définitions générales

Définition 1.3.1: Éléments spectraux

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Valeurs propres : Les n racines complexes λ_i de l'équation $P_A(\lambda) = 0$.
Spectre : L'ensemble des valeurs propres :

$$\mathrm{sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

Rayon spectral : Le plus grand module des valeurs propres :

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

Définition 1.3.2: Vecteurs propres et sous-espaces propres

À toute valeur propre λ de A est associé au moins un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, tel que

$$Ax = \lambda x.$$

On dit alors que x est un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.

Le **sous-espace propre** associé à λ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$:

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x\}.$$

Propriété 1.3.1: Trace et déterminant via les valeurs propres

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

1.3.2 Cas des matrices réelles ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Deux approches pour la recherche d'éléments spectraux :

- **Sur** $\mathbb{C}$: Valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^n$.
- **Sur** $\mathbb{R}$: Valeurs propres réelles uniquement ($P_A(\lambda) = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et vecteurs propres dans $\mathbb{R}^n$. Attention : le spectre peut être vide.

Remarque 1:

Rayon spectral : Toujours calculé sur les racines complexes, même si la matrice est réelle :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C},\ P_A(\lambda) = 0\}$$

1.4 Normes vectorielles et matricielles

1.4.1 Norme vectorielle

Définition 1.4.1: Norme sur $\mathbb{K}^n$

Une **norme** sur $\mathbb{K}^n$ est une application $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

1. *(Séparation)* $\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0,$
2. *(Homogénéité)* $\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|,$
3. *(Inégalité triangulaire)* $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

1.4.2 Norme matricielle

Définition 1.4.2: Norme matricielle

Une **norme matricielle** est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie de plus la condition de **sous-multiplicativité** :

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|, \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1.4.3 Normes matricielles classiques

Propriété 1.4.1: Normes usuelles

Les normes matricielles classiques induites par les normes vectorielles sont :

(a) Norme 1 (max des sommes en colonne) :

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(b) Norme infinie (max des sommes en ligne) :

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(c) Norme spectrale (norme 2) :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2 .$$

(d) Si de plus A est **normale** (i.e. $A^*A = AA^*$), alors :

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

Remarque 2:

Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la conjuguée transposée (adjointe) est notée $A^* = \overline{A}^T$. Pour les matrices réelles, $A^* = A^T$.

1.5 Matrices définies positives

Définition 1.5.1:

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **définie positive** si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x^T A x > 0.$$

Proposition 1.5.1: Cas général

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A_s = \dfrac{A + A^T}{2}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est définie positive.
2. $\lambda_i(A_s) > 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$
3. $\det\Big((A_s)_k\Big) > 0 \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$

Proposition 1.5.2: Cas symétrique : $A^T = A$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est définie positive.
2. $\lambda_i(A) > 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$
3. $\det(A_k) > 0 \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$
4. $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible : $A = B^T B.$

Bibliographie

[1] **Bannouna**, J.
Notes de cours : Analyse Numérique.
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Dhar Mahraz, Fès. Département de Mathématiques — Deuxième année SMA (S4), 2015–2016.

[2] **Pujo-Menjouet**, L.
Analyse Numérique — Troisième année de Licence.
Université Claude Bernard Lyon I, Licence Sciences, Technologies & Santé, Spécialité Mathématiques. 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France.
pujo@math.univ-lyon1.fr

[3] **Gallouët**, Thierry & **Herbin**, Raphaèle.
Cours d'Analyse Numérique.
Université Aix-Marseille, Licence de Mathématiques. 4 août 2023.

[4] **Manceau**, David.
Analyse Numérique Matricielle.
Licence 3 Mathématiques.

Les références sont présentées par ordre d'apparition dans le texte.