UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :
Sciences de la Matière Physique
PC- S_4

Analyse Numérique

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma

Remarque importante

Ce document est un **cours complémentaire**, destiné uniquement à accompagner la correction des travaux dirigés (TD). Il ne se substitue **en aucun cas** au cours magistral dispensé par le **professeur responsable de la matière**. L'auteur de ce document assure uniquement les **séances de TD**.

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025–2026**

Table des matières

3 Résolution numérique des équations non linéaires **1**
3.1 Introduction 1
3.2 Convergence des méthodes itératives 1
3.3 Les formules de Taylor et leurs restes 2
3.4 Localisation et séparation des racines 3
3.5 Méthode de dichotomie (ou bissection) 4
3.5.1 Principe et Algorithme 4
3.6 Méthode du point fixe de Banach-Picard 8
3.6.1 Définition d'un point fixe 8
3.7 Méthode de Newton-Raphson 11
3.7.1 Principe géométrique et analytique 11
3.8 Méthode de la sécante 16
3.8.1 Construction géométrique et algébrique 16
3.8.2 Analyse de convergence 16

Symboles et Abréviations

Symbole	Description / Signification
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	Matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$	Matrices de type (m, n) sur $\mathbb{K}$
I_n	Matrice identité d'ordre n
a_{ij}	Coefficient ligne i, colonne j de A
$\overline{z}$	Conjugué complexe du scalaire $z \in \mathbb{C}$
A^T ou ${}^tA$	Transposée de A : $(A^T)_{ij} = a_{ji}$
A^*	Adjointe de A : $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\quad A^* = \overline{A^T}$
$\mathrm{tr}(A)$	Trace de A : somme des termes diagonaux $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
$\det(A)$	Déterminant de A
A^{-1}	Inverse de A : unique matrice vérifiant $AB = BA = I_n$
$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$	Polynôme caractéristique de A
$\mathrm{sp}(A)$	Spectre de A
λ_i	Valeurs propres de A
$\rho(A) = \max_i \lvert\lambda_i\rvert$	Rayon spectral de A
$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$	Sous-espace propre associé à $\lambda \quad (Ax = \lambda x,\ x \neq 0)$
$\lVert\cdot\rVert,\ \lvert\!\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert\!\rvert$	Norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$; norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_1,\ \lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_\infty$	Norme 1 (max sommes colonnes) ; norme ∞ (max sommes lignes)
$\rho(A) = \max_i \lvert\lambda_i\rvert$	Rayon spectral de A
$\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$	Norme spectrale ; si $A^*A = AA^*$ alors $\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_2 = \rho(A)$
DSD	Matrice à Diagonale Strictement Dominante
SDP	Matrice Symétrique Définie Positive

Les notations suivent les conventions standards de l'Analyse Numérique.

Chapitre 3

Résolution numérique des équations non linéaires

3.1 Introduction

L'objet essentiel de ce chapitre est l'approximation des racines d'une fonction réelle d'une variable réelle. Autrement dit, il s'agit de résoudre numériquement le problème suivant :

Étant donné une fonction continue $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de la forme $]a, b[$), trouver un réel $\alpha \in I$ tel que :

$$f(\alpha) = 0 \tag{3.1}$$

Les méthodes permettant d'approcher une telle racine α sont, par nature, itératives. Elles consistent à construire une suite numérique $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la racine exacte α lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha \tag{3.2}$$

3.2 Convergence des méthodes itératives

L'efficacité d'une méthode numérique se mesure principalement par sa vitesse de convergence, caractérisée de la manière suivante :

Définition 3.2.1: Ordre de convergence

Soit (x_n) une suite générée par une méthode numérique convergeant vers α. On dit que la méthode est d'ordre $p \geq 1$ s'il existe une constante $C > 0$ et un entier $n_0 \geq 0$ tels que :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^p, \quad \forall n \geq n_0 \tag{3.3}$$

- Si $p = 1$, la convergence est dite **linéaire**. Dans ce cas précis, il est impératif que la constante C (appelée facteur de convergence asymptotique) vérifie $C < 1$ pour garantir la convergence.
- Si $p = 2$, la convergence est dite **quadratique** (la précision, en termes de décimales exactes, double approximativement à chaque itération).

Proposition 3.2.1: Critère de détermination de l'ordre

Soit (x_n) une suite convergeant vers α et $e_n = x_n - \alpha$ l'erreur à l'itération n.
S'il existe un réel $p \geq 1$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C,$$

alors la méthode est d'ordre p.

Remarque 1: Convergence locale vs globale

La convergence de ces algorithmes dépend fortement du choix de la donnée initiale x_0. La plupart des théorèmes fournissent des résultats de **convergence locale**, exigeant que x_0 soit choisi dans un voisinage suffisamment proche de la racine α. Une méthode est qualifiée de **globalement convergente** sur un intervalle si la suite (x_n) converge vers α pour tout point de départ $x_0 \in]a, b[$.

3.3 Les formules de Taylor et leurs restes

Dans cette section, nous énonçons les trois principales formulations du théorème de Taylor. Soit I un intervalle réel non trivial et $a \in I$. Ces théorèmes permettent l'approximation polynomiale d'une fonction, la nature du reste dépendant des hypothèses de régularité imposées.

Proposition 3.3.1: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au point a. Alors, pour tout réel $x \in I$, le développement limité suivant au voisinage de a est vérifié :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \tag{3.4}$$

où la quantité $o\left((x-a)^n\right)$ est une fonction négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque x tend vers a.

Proposition 3.3.2: Formule de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a, x \in I$ avec $a \neq x$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur le segment fermé d'extrémités a et x, et $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités a et x, alors il existe un réel c strictement compris entre a et x tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{3.5}$$

Proposition 3.3.3: Formule de Taylor - Laplace

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors pour tout $x \in I$, la relation exacte et globale suivante est vérifiée :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \tag{3.6}$$

3.4 Localisation et séparation des racines

Avant d'appliquer une méthode itérative, il est fondamental d'isoler les racines. La « séparation des racines » consiste à déterminer un ensemble d'intervalles disjoints $[a_i, b_i]$ tels que chacun contienne une et une seule racine de l'équation $f(x) = 0$.

Ce processus repose analytiquement sur le théorème suivant, qui découle du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de la bijection :

Théorème 3.4.1: Existence et Unicité

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

1. **Existence :** Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe au moins une racine $\alpha \in]a, b[$ telle que $f(\alpha) = 0$.
2. **Unicité :** Si, de plus, la dérivée $f'(x)$ garde un signe constant non nul sur $]a, b[$ (c'est-à-dire $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$), alors la fonction f est strictement monotone et la racine α est unique sur cet intervalle.

Démonstration. **Existence :** La fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Par hypothèse, $f(a) \cdot f(b) < 0$, ce qui signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes strictement opposés. Le réel 0 est donc strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = 0$$

Unicité : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux racines distinctes c_1 et c_2 dans $]a, b[$ telles que $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

La fonction f étant continue sur le segment d'extrémités c_1 et c_2, et dérivable sur l'ouvert correspondant, le théorème des accroissements finis (TAF) garantit l'existence d'un réel α strictement compris entre c_1 et c_2 (et donc $\alpha \in]a, b[$) tel que :

$$f(c_1) - f(c_2) = (c_1 - c_2) f'(\alpha)$$

Puisque $f(c_1) = f(c_2) = 0$, cette égalité se simplifie en :

$$0 = (c_1 - c_2) f'(\alpha)$$

Or, par hypothèse, $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, ce qui implique notamment que $f'(\alpha) \neq 0$. Par intégrité dans $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$c_1 - c_2 = 0 \implies c_1 = c_2$$

Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle c_1 et c_2 sont distincts. La racine c est donc unique sur l'intervalle $]a, b[$. ■

Proposition 3.4.1: Techniques de séparation

Pour localiser concrètement ces intervalles d'isolation, deux approches principales sont envisageables :

a) **Étude analytique (Tabulation) :** Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en étudiant les signes de sa dérivée f', puis repérer les changements de signe de $f(x)$ entre les extrema locaux.

b) **Méthode graphique directe :** Tracer la courbe représentative de f et repérer visuellement les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses (Ox).

Exemple 1: Application de la méthode de Dichotomie

Considérons l'équation non linéaire $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$. Montrons qu'elle admet une racine unique sur l'intervalle $[2, 3]$.

- **Existence :** La fonction f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$. Évaluons f aux bornes de l'intervalle :

$$f(2) = 2^3 - 2(2) - 5 = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$$
$$f(3) = 3^3 - 2(3) - 5 = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$$

  Puisque $f(2) \cdot f(3) = -16 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une racine $\alpha \in]2, 3[$.

- **Unicité :** Étudions la dérivée sur cet intervalle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2$. Pour $x \in]2, 3[$, on a $x > 2 \implies x^2 > 4 \implies 3x^2 - 2 > 10$.
  Ainsi, $f'(x) > 0$ strictement sur $]2, 3[$. La fonction f y étant strictement croissante, la racine α est unique. L'intervalle $[2, 3]$ sépare donc cette racine.

3.5 Méthode de dichotomie (ou bissection)

La méthode de dichotomie est l'algorithme de résolution numérique le plus intuitif et le plus robuste. Elle repose directement sur le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que l'intervalle sépare une racine unique α, ce qui se traduit par la condition initiale : $f(a) \cdot f(b) < 0$.

3.5.1 Principe et Algorithme

La méthode consiste à diviser successivement par deux l'intervalle de recherche, en sélectionnant à chaque étape la moitié qui contient la racine. On construit ainsi une suite d'intervalles emboîtés $I_n = [a_n, b_n]$ contenant α, définie de la manière suivante :

- **Initialisation :** On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- **Itération :** Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on calcule le point milieu de l'intervalle I_n :

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \tag{3.7}$$

- **Mise à jour :** On évalue le signe de $f(x_n)$ pour déterminer le nouvel intervalle I_{n+1} :
  — Si $f(x_n) = 0$: la racine exacte est trouvée ($\alpha = x_n$), l'algorithme s'arrête.

— Si $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$: la racine se trouve dans la moitié gauche. On pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$.
— Si $f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$: la racine se trouve dans la moitié droite. On pose $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Critères d'arrêt

En pratique, le processus itératif est stoppé lorsqu'une précision tolérée $\varepsilon > 0$ est atteinte. Plusieurs critères peuvent être choisis :

i) **Sur la taille de l'intervalle :** $|b_n - a_n| < \varepsilon$ (le plus rigoureux pour cette méthode).
ii) **Sur le résidu :** $|f(x_n)| < \varepsilon$ (garantit que l'image est proche de zéro, mais l'abscisse peut en être éloignée si la dérivée est faible).
iii) **Sur la stagnation de la suite :** $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Théorème 3.5.1: Convergence et complexité de la dichotomie

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des points milieux construite par la méthode de dichotomie. Cette suite converge vers la racine exacte α. De plus, pour garantir une approximation de α avec une précision ε (c'est-à-dire $|x_n - \alpha| \leq \varepsilon$), le nombre d'itérations n doit vérifier :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \tag{3.8}$$

Démonstration. Par construction de la suite d'intervalles $I_n = [a_n, b_n]$, à chaque itération n, la longueur de l'intervalle est divisée par deux. On a donc la relation de récurrence :

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$$

Par une récurrence immédiate, on exprime la longueur du n-ième intervalle en fonction de l'intervalle initial $I_0 = [a, b]$:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \tag{3.9}$$

Puisque la racine α appartient par définition à tous les intervalles I_n, la distance maximale entre α et n'importe quel point de l'intervalle $[a_n, b_n]$ (et en particulier a_n ou x_n) est majorée par la longueur de cet intervalle. Ainsi :

$$|x_n - \alpha| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, le terme $\frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0. Par le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$, ce qui prouve la convergence de la méthode.

Pour déterminer le nombre minimal d'itérations n garantissant une précision ε, il suffit d'imposer que la longueur de l'intervalle d'incertitude soit inférieure à ε :

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \iff 2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

La fonction logarithme népérien (ln) étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on applique cette fonction aux deux membres de l'inégalité :

$$n\ln(2) \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

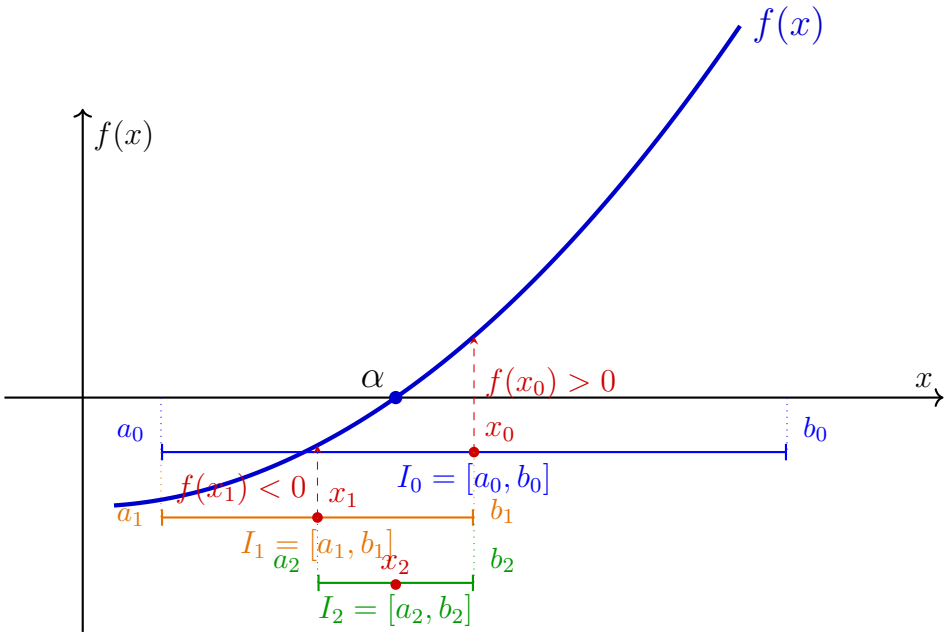


Figure 3.1 – Interprétation géométrique de la méthode de dichotomie : à chaque étape, on évalue le signe de la fonction au point milieu x_k pour sélectionner la moitié de l'intervalle contenant la racine α.

Exemple 2:

Considérons la résolution de l'équation non linéaire transcendante $f(x) = \cos(x) - x = 0$. Cherchons une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.

Vérifions les hypothèses :

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[0, 1]$.
- Aux bornes de l'intervalle, on a : $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 \approx -0.4597 < 0$.

Puisque $f(0) \cdot f(1) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une racine $\alpha \in]0, 1[$.

Le tableau suivant résume les cinq premières itérations de la méthode de dichotomie. On note l'erreur maximale théorique à l'itération n par $\Delta x_n = \frac{b_n - a_n}{2}$.

n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	Δx_n
0	0.00000	1.00000	0.50000	1.00000	−0.45970	0.37758	0.50000
1	0.50000	1.00000	0.75000	0.37758	−0.45970	−0.01831	0.25000
2	0.50000	0.75000	0.62500	0.37758	−0.01831	0.18596	0.12500
3	0.62500	0.75000	0.68750	0.18596	−0.01831	0.08529	0.06250
4	0.68750	0.75000	0.71875	0.08529	−0.01831	0.03388	0.03125

Table 3.1 – Itérations de la méthode de dichotomie pour $f(x) = \cos(x) - x$

Estimation du nombre d'itérations :

Si l'on souhaite garantir une précision $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-2}$ (soit 0.005), le théorème de

convergence nous donne le nombre minimal d'itérations n à effectuer :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln\left(\frac{1-0}{0.005}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln(200)}{\ln 2} \approx 7.64$$

Il faut donc effectuer **au moins 8 itérations** pour s'assurer que l'erreur absolue $|x_8 - \alpha|$ soit strictement inférieure à 0.005.

Algorithme 1 Méthode de dichotomie (Bissection)

Entrée : Fonction f, extrémités a et b, précision $\varepsilon > 0$, itérations maximales N_0
Sortie : Valeur approchée x de la solution de $f(x) = 0$

```
// Vérification préalable des bornes
if f(a) = 0 then
    return a
end
if f(b) = 0 then
    return b
end
if f(a) × f(b) > 0 then
    return Erreur : Pas de changement de signe sur l'intervalle
end
// Initialisation
N ← 1
// Boucle principale
while N ≤ N_0 do
    x ← (a + b)/2                                   // Calcul du point milieu
    // Critère d'arrêt sur la racine exacte ou la précision
    if f(x) = 0 ou (b − a)/2 < ε then
        return x
    end
    // Sélection du sous-intervalle
    if f(a) × f(x) > 0 then
        a ← x
    else
        b ← x
    end
    N ← N + 1
end
// Sortie si le nombre maximal d'itérations est atteint
return x  (L'erreur maximale est de (b − a)/2)
```

3.6 Méthode du point fixe de Banach-Picard

Avant d'étudier l'ordre de convergence, rappelons les notions fondamentales liées à la méthode du point fixe, qui permet de résoudre numériquement des équations de la forme $f(x) = x$.

3.6.1 Définition d'un point fixe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $\bar{x} \in I$ est appelé **point fixe** de la fonction f si et seulement si :

$$f(\bar{x}) = \bar{x}$$

Remarque 2:

Graphiquement, la recherche des points fixes d'une fonction f correspond à la recherche des abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction f et la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

Définition 3.6.1: Fonction contractante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to I$ est dite **strictement contractante** (ou k-contractante) s'il existe une constante réelle k telle que $0 \leq k < 1$ et que, pour tout couple de réels $(x, y) \in I^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

La constante k est appelée la **constante de contraction**.

Conséquence pratique : Si f est dérivable sur I et qu'il existe une constante $k < 1$ telle que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$, alors d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est k-contractante sur I. C'est d'ailleurs cette propriété que l'on utilise souvent en pratique (voir l'exercice suivant).

Le théorème suivant garantit l'existence, l'unicité et la convergence asymptotique de la méthode du point fixe sous certaines conditions.

Théorème 3.6.1: Théorème du point fixe (Banach-Picard)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, et $f : I \to I$ une fonction continue. Si f est une fonction **contractante** sur I de constante de contraction $k \in [0, 1[$, alors :

1. La fonction f admet un **unique** point fixe $\bar{x} \in I$.
2. Pour tout choix du point initial $x_0 \in I$, la suite itérative $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

converge vers l'unique point fixe $\bar{x}$.

3. L'ordre de convergence de cette méthode est au moins **linéaire** (d'ordre 1). L'erreur à l'étape $n+1$ est directement proportionnelle à l'erreur de l'étape précédente, vérifiant la relation :

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq k|x_n - \bar{x}|$$

Démonstration. **Existence et convergence (Suite de Cauchy)**

Soit $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. La fonction f étant contractante, l'écart entre termes consécutifs vérifie :

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

Par récurrence immédiate :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$$

Montrons que (x_n) est de Cauchy. Pour $m > n$, l'inégalité triangulaire et la série géométrique donnent :

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i |x_1 - x_0|$$

$$|x_m - x_n| \leq k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

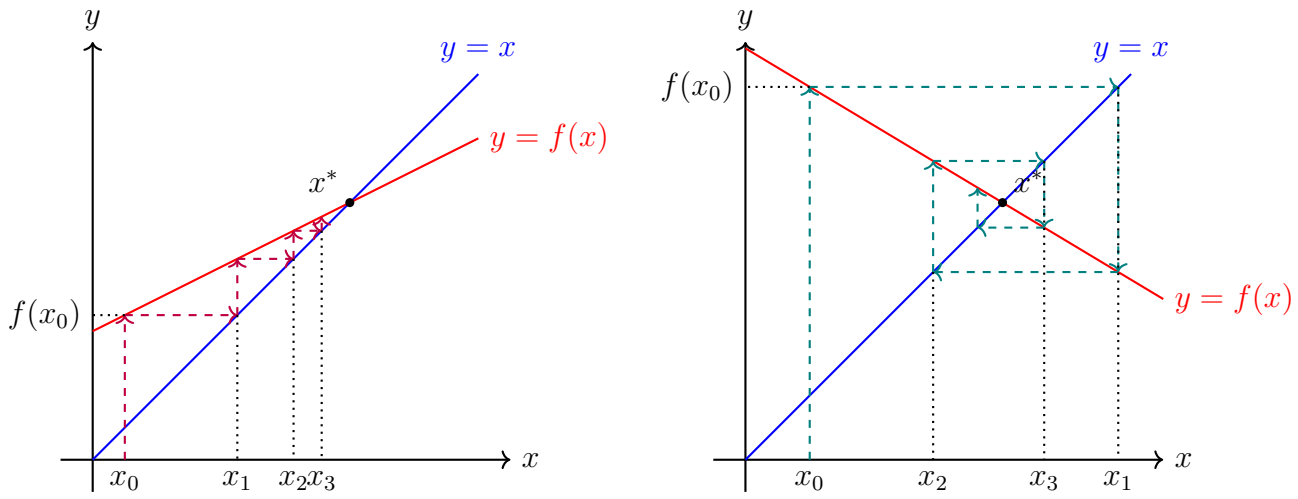
Puisque $k < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_m - x_n| = 0$. La suite (x_n) est de Cauchy dans I (fermé de $\mathbb{R}$ complet), elle converge donc vers une limite $\bar{x} \in I$. La continuité de f assure par passage à la limite que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Unicité du point fixe

Soient $\bar{x}, \bar{y} \in I$ deux points fixes, soit $f(\bar{x}) = \bar{x}$ et $f(\bar{y}) = \bar{y}$. La contraction impose :

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq k|\bar{x} - \bar{y}|$$

Ceci implique $(1-k)|\bar{x} - \bar{y}| \leq 0$. Puisque $k < 1$, on a $1 - k > 0$. L'unique solution est $|\bar{x} - \bar{y}| = 0$, d'où $\bar{x} = \bar{y}$. ■



(a) Contraction avec $0 < f'(x) < 1$ **(b)** Contraction avec $-1 < f'(x) < 0$

Figure 3.2 – Représentation géométrique de la convergence de la méthode du point fixe $x_{n+1} = f(x_n)$.

Algorithme Méthode du Point Fixe

Entrée : Fonction d'itération f, point initial x_0, précision $\varepsilon > 0$, itérations max N_0

Sortie : Valeur approchée du point fixe x ou message d'échec

```
// Initialisation du compteur
N ← 1
// Boucle itérative principale
while N ≤ N_0 do
    // Calcul de l'itération suivante
    x ← f(x_0)
    // Critère d'arrêt sur la distance entre deux itérés successifs
    if |x − x_0| ≤ ε then
        return x (Convergence atteinte en N itérations)
    end
    // Mise à jour pour l'étape suivante
    x_0 ← x
    N ← N + 1
end
// Sortie si le budget d'itérations est épuisé sans convergence
return La méthode a échoué à converger après N_0 itérations
```

Exemple 3:Application du Théorème de Banach-Picard

Soit f définie sur l'intervalle fermé $I = [0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

1) Vérification des hypothèses

Stabilité : f est croissante et continue sur I. Puisque $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$, on a $f(I) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset I$. L'intervalle est stable par f.

Contraction : $\forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

f est donc strictement contractante de rapport $k = \frac{1}{2} < 1$.

2) Existence et unicité du point fixe

L'intervalle I étant un fermé de $\mathbb{R}$, le théorème de Banach-Picard assure l'existence et l'unicité d'un point fixe $\bar{x} \in I$. Sa détermination donne analytiquement :

$$f(\bar{x}) = \bar{x} \iff \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2} = \bar{x} \iff \bar{x} = 1$$

3) Suite itérative et convergence

La suite définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}$ converge vers $\bar{x} = 1$.

Démonstration analytique de l'erreur :

$$x_{n+1} - 1 = \left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2}(x_n - 1)$$

L'erreur est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Par récurrence :

$$x_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (x_0 - 1)$$

Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. On a donc $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, confirmant une convergence linéaire.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$	$\lvert e_n\rvert$
0	0.000000	0.500000	0.500000	1.000000
1	0.500000	0.750000	0.250000	0.500000
2	0.750000	0.875000	0.125000	0.250000
3	0.875000	0.937500	0.062500	0.125000
4	0.937500	0.968750	0.031250	0.062500
5	0.968750	0.984375	0.015625	0.031250

Table 3.2 – Itérations du point fixe pour $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ avec $x_0 = 0$

3.7 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de dichotomie est robuste mais sa convergence linéaire est souvent jugée trop lente pour les applications exigeantes. La méthode de Newton-Raphson pallie ce défaut en exploitant les propriétés différentielles de la fonction pour accélérer spectaculairement la recherche de la racine.

3.7.1 Principe géométrique et analytique

Plutôt que de diviser un intervalle, cette méthode part d'une estimation initiale x_0 proche de la racine α. À chaque itération, on approche localement la courbe représentative de f par sa tangente au point d'abscisse x_n. L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses définit la nouvelle approximation x_{n+1}.

Analytiquement, cela revient à utiliser un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de x_n :

$$f(x) \approx f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n)$$

En cherchant x_{n+1} tel que cette approximation s'annule, on obtient :

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) \implies x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Définition 3.7.1: Algorithme de Newton-Raphson

Soit f une fonction dérivable. À partir d'une donnée initiale x_0, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ générée par la méthode de Newton-Raphson est définie par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \tag{3.10}$$

Cette méthode nécessite que la dérivée ne s'annule pas aux points évalués ($f'(x_n) \neq 0$).

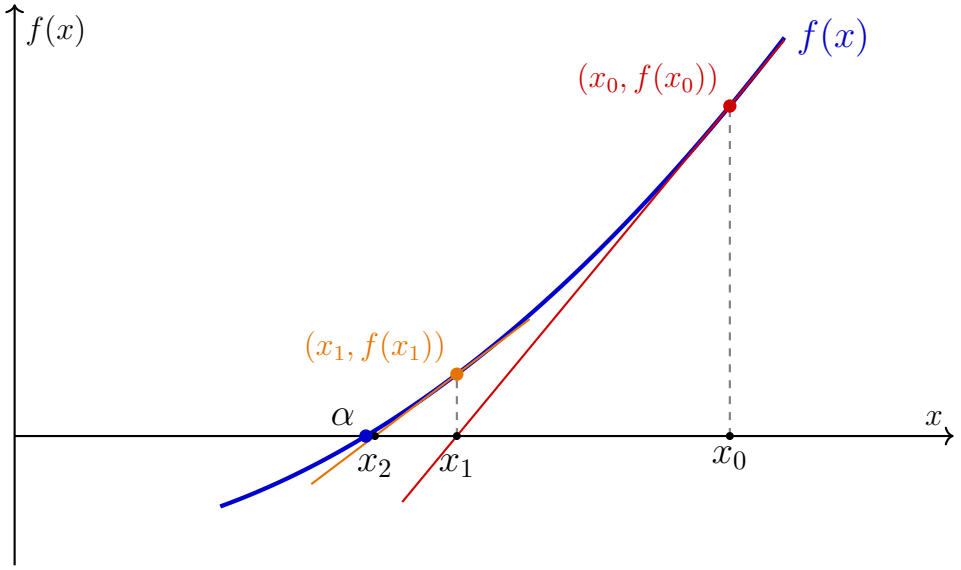


Figure 3.3 – Interprétation géométrique de la méthode de Newton-Raphson : les tangentes successives convergent rapidement vers la racine α.

Théorème 3.7.1: Convergence quadratique

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I contenant une racine simple α (c'est-à-dire $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$). Alors, il existe un voisinage $V \subset I$ de α tel que, pour tout $x_0 \in V$, la suite (x_n) définie par la méthode de Newton-Raphson converge vers α. De plus, la convergence est au moins **quadratique** (d'ordre $p = 2$), c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2 \tag{3.11}$$

Démonstration. Pour évaluer la vitesse de convergence, posons $e_n = x_n - \alpha$ l'erreur commise à l'itération n. Notre objectif est de relier l'erreur à l'étape $n+1$ (e_{n+1}) à celle de l'étape n (e_n).

Par définition du schéma de Newton-Raphson, nous avons :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En soustrayant la racine exacte α aux deux membres de cette égalité, il vient :

$$\underbrace{x_{n+1} - \alpha}_{= e_{n+1}} = \underbrace{x_n - \alpha}_{= e_n} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient la relation fondamentale :

$$e_{n+1} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.12}$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I, nous pouvons écrire son développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au point x_n, évalué en α :

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

où ξ_n est un réel strictement compris entre x_n et α.

Or, par hypothèse, α est une racine, donc $f(\alpha) = 0$. De plus, on remarque que $\alpha - x_n = -e_n$. L'égalité se réécrit donc :

$$0 = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

En isolant les termes de degré inférieur ou égal à 1, on remarque que l'on fait apparaître exactement l'opposé du numérateur de notre équation (3.12) :

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

En substituant ce résultat dans l'équation (3.12), nous obtenons l'expression exacte de l'erreur à l'itération $n+1$:

$$e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} e_n^2$$

En passant à la valeur absolue :

$$|e_{n+1}| = \left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| |e_n|^2 \tag{3.13}$$

Puisque $f \in \mathcal{C}^2(I)$, sa dérivée seconde f'' est continue. De plus, comme α est une racine simple ($f'(\alpha) \neq 0$), la continuité de f' garantit l'existence d'un voisinage fermé $V \subset I$ de α sur lequel f' ne s'annule pas. Sur ce voisinage compact V, la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ est majorée par un réel M, et la fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est minorée par un réel $m > 0$.

Ainsi, en définissant la constante $C = \frac{M}{2m} > 0$, l'équation (3.13) devient l'inégalité de convergence quadratique désirée :

$$|e_{n+1}| \leq C|e_n|^2$$

Si le point de départ x_0 est choisi dans le voisinage V tel que $C|e_0| < 1$, alors la suite des erreurs (e_n) tend vers zéro, et la suite (x_n) converge vers α avec un ordre $p = 2$. ■

Exemple 4: Application de Newton-Raphson

Reprenons l'équation transcendante étudiée précédemment avec la méthode de dichotomie : $f(x) = \cos(x) - x = 0$. Appliquons cette fois-ci la méthode de Newton-Raphson pour évaluer sa vitesse de convergence.

La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée première est :

$$f'(x) = -\sin(x) - 1$$

Le schéma itératif de Newton-Raphson s'écrit donc :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1} = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n}{\sin(x_n) + 1}$$

Nous choisissons le point de départ $x_0 = 0.5$ (le milieu de l'intervalle initial utilisé lors de la dichotomie). Le tableau suivant détaille les itérations avec une précision poussée à 6 décimales :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0.500000	0.377582	-1.479425	0.255222
1	0.755222	-0.027103	-1.685450	0.016081
2	0.739141	-0.000095	-1.673632	0.000056
3	0.739085	0.000000	-1.673612	0.000000

Table 3.3 – Itérations de Newton-Raphson pour $f(x) = \cos(x) - x$

Remarque 3:

La convergence quadratique implique que le nombre de décimales exactes double approximativement à chaque itération. C'est une méthode extrêmement rapide, mais sa convergence n'est que **locale** : un mauvais choix de x_0 peut entraîner la divergence de la suite.

Exemple 5: Échec critique par division par zéro

La méthode de Newton-Raphson exige que la dérivée ne s'annule pas aux points itérés. Considérons la fonction $f(x) = (x-2)^3 + 1$. Cette fonction admet une racine unique en $\alpha = 1$ et reste strictement positive sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Si l'utilisateur choisit par erreur le point de départ $x_0 = 2$, la dérivée s'évalue à $f'(2) = 3(2-2)^2 = 0$. Le schéma itératif s'écrit alors :

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{0} \quad \text{(Non défini !)}$$

Géométriquement, le point $x_0 = 2$ est un point d'inflexion à tangente horizontale. Bien que la courbe "descende" invariablement vers la racine $\alpha = 1$, la tangente en x_0 est strictement parallèle à l'axe des abscisses (Ox). Elle ne le coupera jamais, ce qui provoque l'arrêt brutal de l'algorithme.

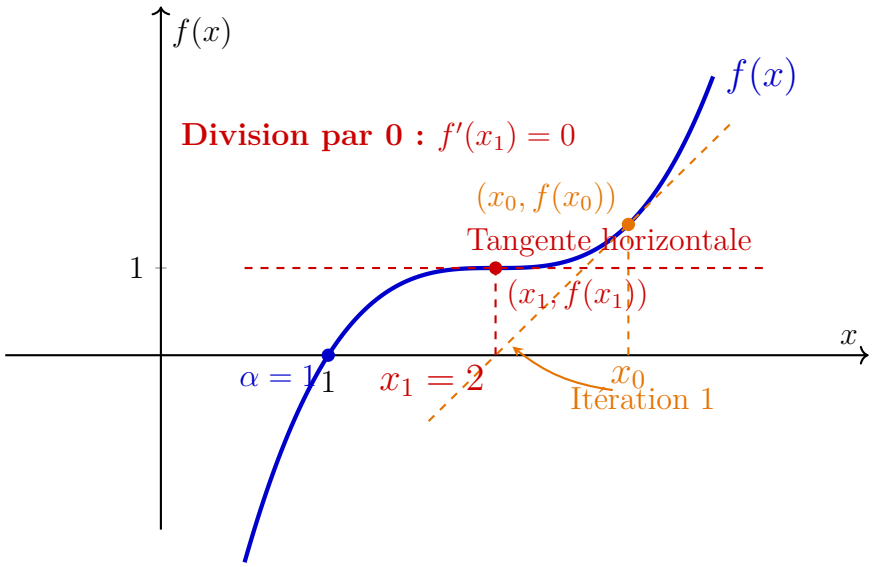


Figure 3.4 – Piège algorithmique de Newton-Raphson : en choisissant un point initial $x_0 \approx 2.794$, la première itération projette géométriquement x_1 sur le point d'inflexion ($x = 2$). En ce point, la dérivée s'annule, rendant le calcul de x_2 impossible.

Algorithme 2 Méthode de Newton-Raphson

Entrée : Fonction f, sa dérivée f', point initial x_0, précision $\varepsilon > 0$, itérations max N_0

Sortie : Valeur approchée x de la solution ou message d'échec

```
// Initialisation du compteur
N ← 1
// Boucle itérative principale
while N ≤ N_0 do
    // Sécurité : Prévention de la division par zéro
    if f'(x_0) = 0 then
        return Erreur : Dérivée nulle atteinte au point x_0
    end
    // Calcul de l'itération suivante
    x ← x_0 − f(x_0)/f'(x_0)
    // Critère d'arrêt sur la stagnation de l'erreur
    if |x − x_0| ≤ ε then
        return x (Convergence atteinte en N itérations)
    end
    // Mise à jour des variables pour l'étape suivante
    x_0 ← x
    N ← N + 1
end
// Sortie si le budget d'itérations est épuisé sans convergence
return La méthode a échoué à converger après N_0 itérations
```

3.8 Méthode de la sécante

La méthode de la sécante constitue une alternative robuste à la méthode de Newton-Raphson pour la résolution numérique d'équations non linéaires du type $f(x) = 0$. Son utilisation s'impose généralement lorsque l'expression analytique de la dérivée f' est algorithmiquement coûteuse à évaluer ou explicitement indisponible.

3.8.1 Construction géométrique et algébrique

Géométriquement, plutôt que d'approcher la courbe représentative de f par sa tangente locale, on l'approxime par la droite sécante reliant les deux dernières itérations calculées, soit les points $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$.

Algébriquement, cette démarche équivaut à substituer la dérivée exacte par le taux d'accroissement (différence finie) entre ces deux points. Ainsi, à partir de deux valeurs initiales $x_0, x_1 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des approximations successives est générée par la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{3.14}$$

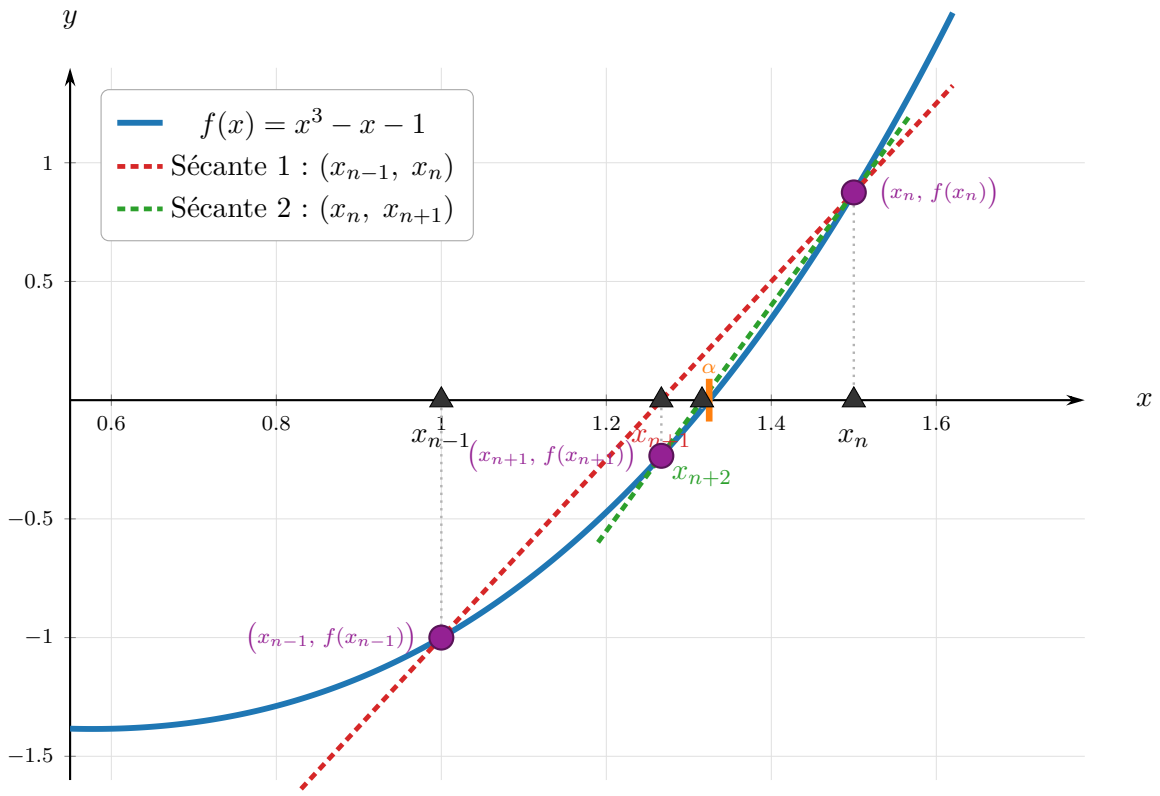


Figure 3.5 – Méthode de la sécante appliquée à $f(x) = x^3 - x - 1$, avec les approximations initiales $x_{n-1} = 1{,}0$ et $x_n = 1{,}5$. La **sécante 1** (en rouge, tiretée) relie $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$, et coupe l'axe des abscisses en $x_{n+1} \approx 1{,}267$. La **sécante 2** (en vert) relie $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$, et coupe en $x_{n+2} \approx 1{,}316$. La **racine exacte** est $\alpha \approx 1{,}3247$. Les flèches en bas illustrent la dynamique de convergence.

3.8.2 Analyse de convergence

Les propriétés asymptotiques de ce schéma itératif à deux pas sont formalisées dans le théorème suivant, qui précise les conditions d'application et la vitesse de convergence.

Théorème 3.8.1: Convergence de la méthode de la sécante

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert I. Supposons qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$ avec $f'(\alpha) \neq 0$ (c'est-à-dire que α est une racine simple). Si les termes initiaux x_0 et x_1 sont choisis dans un voisinage suffisamment restreint de α, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

est rigoureusement bien définie pour tout $n \geq 1$ et converge vers la racine α.
De surcroît, l'ordre de convergence asymptotique de cette méthode est superlinéaire. Il est caractérisé par l'exposant ϕ, correspondant au nombre d'or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^{\phi}} = C > 0 \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \tag{3.15}$$

Démonstration. Soit α la racine exacte vérifiant $f(\alpha) = 0$. L'erreur à l'itération n est définie par :

$$e_n = x_n - \alpha$$

L'objectif est d'établir la relation liant asymptotiquement e_{n+1}, e_n et e_{n-1}.

En substituant $x_n = \alpha + e_n$ dans l'algorithme de la sécante et en effectuant un développement de Taylor de f à l'ordre 2 autour de α (en exploitant les hypothèses $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$), la relation se simplifie pour des erreurs suffisamment petites. On aboutit à la relation fondamentale suivante :

$$e_{n+1} \approx \left(\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right) e_n e_{n-1}$$

En posant la constante asymptotique $K = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$, on obtient en valeur absolue :

$$|e_{n+1}| \approx K|e_n||e_{n-1}|$$

Par définition, l'ordre de convergence p postule l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^p$$

Par décalage d'indice, on déduit également :

$$|e_n| \approx C|e_{n-1}|^p \implies |e_{n-1}| \approx C^{-1/p}|e_n|^{1/p}$$

En injectant ces expressions dans la relation fondamentale, il vient :

$$C|e_n|^p \approx K|e_n|\left(C^{-1/p}|e_n|^{1/p}\right)$$

Ce qui donne, en regroupant les puissances de l'erreur :

$$C|e_n|^p \approx KC^{-1/p}|e_n|^{1+\frac{1}{p}}$$

Pour que cette équivalence asymptotique soit valide lorsque $n \to +\infty$ (et pour $e_n \neq 0$), les exposants de $|e_n|$ de part et d'autre de l'égalité doivent nécessairement être identiques :

$$p = 1 + \frac{1}{p}$$

La multiplication par p (qui est strictement positif) conduit à l'équation caractéristique :

$$p^2 - p - 1 = 0$$

Cette équation polynomiale du second degré admet une unique racine positive. L'ordre de convergence retenu est donc le nombre d'or :

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1,618$$

La convergence de la méthode de la sécante est par conséquent superlinéaire.

■

Algorithme Méthode de la Sécante

Entrée : Fonction f, points initiaux x_0 et x_1, précision $\varepsilon > 0$, itérations max N_0
Sortie : Valeur approchée x de la solution ou message d'échec

```
// Initialisation du compteur
N ← 1
// Boucle itérative principale
while N ≤ N_0 do
    // Sécurité : Prévention de la division par zéro
    if f(x_1) − f(x_0) = 0 then
        return Erreur : Dénominateur nul atteint aux points x_0 et x_1
    end
    // Calcul de l'itération suivante
    x ← x_1 − f(x_1) (x_1 − x_0) / (f(x_1) − f(x_0))
    // Critère d'arrêt sur la stagnation de l'erreur
    if |x − x_1| ≤ ε then
        return x (Convergence atteinte en N itérations)
    end
    // Mise à jour des variables pour l'étape suivante
    x_0 ← x_1
    x_1 ← x
    N ← N + 1
end
// Sortie si le budget d'itérations est épuisé sans convergence
return La méthode a échoué à converger après N_0 itérations
```

Exemple 6: Application de la méthode de la sécante

Considérons la fonction $f(x) = x^3 - x - 1$ dont nous cherchons la racine réelle en utilisant les points initiaux $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Le schéma itératif de la méthode de la sécante ne nécessite pas le calcul de la dérivée, mais utilise le taux d'accroissement basé sur les deux itérations précédentes :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Remarque analytique : Les points initiaux encadrent la racine cherchée puisque $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 5 > 0$. Contrairement au cas d'une racine double, l'algorithme ne souffre ici d'aucune singularité ni risque de division par zéro lors des premières étapes.

En appliquant la formule de récurrence avec une précision poussée à 6 décimales, nous obtenons le tableau suivant :

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1.000000	−1.000000	–
1	2.000000	5.000000	1.000000
2	1.166667	−0.578704	0.833333
3	1.253112	−0.285298	0.086445
4	1.337206	0.053882	0.084094
5	1.323850	−0.003698	0.013356
6	1.324708	−0.000043	0.000858
7	1.324718	0.000000	0.000010

Table 3.4 – Itérations de la sécante pour $f(x) = x^3 - x - 1$

Bibliographie

[1] **Bannouna**, J.
Notes de cours : Analyse Numérique.
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Dhar Mahraz, Fès. Département de Mathématiques — Deuxième année SMA (S4), 2015–2016.

[2] **Pujo-Menjouet**, L.
Analyse Numérique — Troisième année de Licence.
Université Claude Bernard Lyon I, Licence Sciences, Technologies & Santé, Spécialité Mathématiques. 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France.
pujo@math.univ-lyon1.fr

[3] **Gallouët**, Thierry & **Herbin**, Raphaèle.
Cours d'Analyse Numérique.
Université Aix-Marseille, Licence de Mathématiques. 4 août 2023.

[4] **Manceau**, David.
Analyse Numérique Matricielle.
Licence 3 Mathématiques.

Les références sont présentées par ordre d'apparition dans le texte.