UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :
Sciences de la Matière Physique
PC- S_4

Analyse Numérique

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma

Remarque importante

Ce document est un **cours complémentaire**, destiné uniquement à accompagner la correction des travaux dirigés (TD). Il ne se substitue **en aucun cas** au cours magistral dispensé par le **professeur responsable de la matière**. L'auteur de ce document assure uniquement les **séances de TD**.

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025–2026**

Table des matières

4 Interpolation polynomiale **1**
4.1 Méthode des coefficients indéterminés et matrice de Vandermonde . . . 1
4.1.1 Posé du problème d'interpolation 1
4.1.2 La matrice de Vandermonde 1
4.1.3 Existence et unicité du polynôme interpolateur 2
4.2 Polynôme d'interpolation de Lagrange 4
4.2.1 Motivation : construire une base adaptée 4
4.2.2 Base de Lagrange 4
4.2.3 Formule de Lagrange 5
4.3 Algorithme de Newton et différences divisées 6
4.3.1 Motivation : vers une base triangulaire 6
4.3.2 Base de Newton 7
4.3.3 Différences divisées 7
4.3.4 Construction du polynôme de Newton 7
4.3.5 Algorithme des différences divisées et tableau de Newton 8
4.4 Analyse de l'erreur d'interpolation 9
4.4.1 Définition de l'erreur 10
4.4.2 Formule exacte de l'erreur 10

Symboles et Abréviations

Symbole	Description / Signification
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	Matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$	Matrices de type (m, n) sur $\mathbb{K}$
I_n	Matrice identité d'ordre n
a_{ij}	Coefficient ligne i, colonne j de A
$\overline{z}$	Conjugué complexe du scalaire $z \in \mathbb{C}$
A^T ou ${}^tA$	Transposée de A : $(A^T)_{ij} = a_{ji}$
A^*	Adjointe de A : $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\quad A^* = \overline{A^T}$
$\mathrm{tr}(A)$	Trace de A : somme des termes diagonaux $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
$\det(A)$	Déterminant de A
A^{-1}	Inverse de A : unique matrice vérifiant $AB = BA = I_n$
$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$	Polynôme caractéristique de A
$\mathrm{sp}(A)$	Spectre de A
λ_i	Valeurs propres de A
$\rho(A) = \max_i \lvert\lambda_i\rvert$	Rayon spectral de A
$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$	Sous-espace propre associé à $\lambda \quad (Ax = \lambda x,\ x \neq 0)$
$\lVert\cdot\rVert,\ \lvert\!\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert\!\rvert$	Norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$; norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_1,\ \lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_\infty$	Norme 1 (max sommes colonnes) ; norme ∞ (max sommes lignes)
$\rho(A) = \max_i \lvert\lambda_i\rvert$	Rayon spectral de A
$\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$	Norme spectrale ; si $A^*A = AA^*$ alors $\lvert\!\lvert\!\lvert A\rvert\!\rvert\!\rvert_2 = \rho(A)$
DSD	Matrice à Diagonale Strictement Dominante
SDP	Matrice Symétrique Définie Positive

Les notations suivent les conventions standards de l'Analyse Numérique.

Chapitre 4

Interpolation polynomiale

Objectifs du chapitre. Étant donné un ensemble fini de points $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ issus d'une fonction inconnue ou coûteuse à évaluer, l'interpolation polynomiale consiste à construire un polynôme P_n de degré au plus n (c-à-d $P_n \in \mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[x]$) qui *passe exactement* par tous ces points.

4.1 Méthode des coefficients indéterminés et matrice de Vandermonde

4.1.1 Posé du problème d'interpolation

Définition 4.1.1: Problème d'interpolation polynomiale

Soient $n+1$ points distincts $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de $\mathbb{R}$, appelés **nœuds d'interpolation**, et $n+1$ valeurs réelles $y_0, y_1, \ldots, y_n$. On appelle *polynôme interpolateur* tout polynôme $P_n \in \mathcal{P}_n$ (i.e. de degré au plus n) vérifiant les **conditions d'interpolation** :

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Les couples (x_i, y_i) sont appelés **données d'interpolation**.

La démarche la plus naturelle consiste à écrire P_n dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Les $n+1$ coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constituent les *inconnues* ; les conditions d'interpolation fournissent exactement $n+1$ équations, ce qui mène au système linéaire décrit ci-après.

4.1.2 La matrice de Vandermonde

En substituant chaque nœud x_i dans l'expression de P_n, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Définition 4.1.2: Matrice de Vandermonde

La matrice $V \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$V = \left(x_i^j\right)_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice de Vandermonde** associée aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

4.1.3 Existence et unicité du polynôme interpolateur

Théorème 4.1.1: Existence et unicité

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et $y_0, y_1, \ldots, y_n$ des réels quelconques. Il existe **un unique** polynôme $P_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $P_n(x_i) = y_i$ pour tout $0 \le i \le n$.

Démonstration. L'unicité et l'existence sont équivalentes à l'inversibilité de la matrice de Vandermonde V. On montre que

$$\det(V) = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Étape 1 — Calcul du déterminant. On procède par récurrence sur n.

Initialisation ($n = 1$). $\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0$, ce qui est bien le produit vide $\prod_{0\le i<j\le 1}(x_j - x_i) = x_1 - x_0$.

Hérédité. Supposons la formule vraie pour $n-1$ nœuds. Dans la matrice V d'ordre $n+1$, on soustrait x_0 fois la colonne $j-1$ à la colonne j pour $j = n, n-1, \ldots, 1$. La première colonne reste $(1, 1, \ldots, 1)^T$. Pour $i \ge 1$, la case (i, j) devient $x_i^j - x_0 x_i^{j-1} = x_i^{j-1}(x_i - x_0)$. On développe selon la première ligne et on factorise $(x_i - x_0)$ dans chaque ligne $i \ge 1$:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \cdot \det(V'),$$

où V' est la matrice de Vandermonde d'ordre n associée aux nœuds $x_1, \ldots, x_n$. Par hypothèse de récurrence, $\det(V') = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$, d'où

$$\det(V) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \cdot \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i) = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Illustration détaillée pour $n = 3$ (Matrice d'ordre 4)

Soit la matrice de Vandermonde V associée aux nœuds x_0, x_1, x_2, x_3 :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$$

Pour annuler les termes de la première ligne tout en préservant la possibilité de factoriser, on effectue les opérations sur les colonnes de droite à gauche, selon la transformation $C_j \leftarrow C_j - x_0 C_{j-1}$:

Étape 1 $(j = 3)$: $C_3 \leftarrow C_3 - x_0 C_2$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^2(x_1 - x_0) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^2(x_2 - x_0) \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^2(x_3 - x_0) \end{pmatrix}$$

Étape 2 $(j = 2)$: $C_2 \leftarrow C_2 - x_0 C_1$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_1(x_1 - x_0) & x_1^2(x_1 - x_0) \\ 1 & x_2 & x_2(x_2 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) \\ 1 & x_3 & x_3(x_3 - x_0) & x_3^2(x_3 - x_0) \end{pmatrix}$$

Étape 3 $(j = 1)$: $C_1 \leftarrow C_1 - x_0 C_0$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & x_1^2(x_1 - x_0) \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) \\ 1 & x_3 - x_0 & x_3(x_3 - x_0) & x_3^2(x_3 - x_0) \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant de V_3 suivant sa première ligne (développement de Laplace), on obtient :

$$\begin{aligned} \det(V) &= 1 \times \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & x_1^2(x_1 - x_0) \\ x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) \\ x_3 - x_0 & x_3(x_3 - x_0) & x_3^2(x_3 - x_0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) & x_3(x_3 - x_0) \\ x_1^2(x_1 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) & x_3^2(x_3 - x_0) \end{pmatrix}, \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On reconnaît à droite le déterminant de la matrice de Vandermonde d'ordre 3, notée V'. On peut donc écrire :

$$\det(V) = \left(\prod_{i=1}^{3} (x_i - x_0) \right) \det(V')$$

Par hypothèse de récurrence sur V', on sait que $\det(V') = \prod_{1 \le i < j \le 3} (x_j - x_i)$. En fusionnant les deux produits, on obtient le résultat final :

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le 3} (x_j - x_i)$$

Étape 2 — Inversibilité. Puisque les nœuds sont deux à deux distincts, tous les facteurs $(x_j - x_i)$ avec $i < j$ sont non nuls, donc $\det(V) \neq 0$ et V est inversible. Le système $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ admet donc une unique solution, ce qui établit l'existence et l'unicité de P_n. ■

4.2 Polynôme d'interpolation de Lagrange

4.2.1 Motivation : construire une base adaptée

L'idée est de remplacer la base canonique $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ par une base $\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ de $\mathcal{P}_n$ qui satisfait *déjà* les conditions d'interpolation de façon élémentaire : chaque L_k vaut 1 au nœud x_k et 0 en tous les autres nœuds.

4.2.2 Base de Lagrange

Définition 4.2.1: Polynômes de base de Lagrange

Pour $0 \leq k \leq n$, le k-ième **polynôme de base de Lagrange** associé aux nœuds $x_0, \ldots, x_n$ est défini par :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

Proposition 4.2.1: Propriété de Kronecker

Les polynômes de base de Lagrange vérifient :

$$L_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k, \end{cases} \qquad 0 \leq i, k \leq n.$$

De plus, $\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

Démonstration. Propriété de Kronecker. Le numérateur de $L_k(x)$ contient le facteur $(x - x_i)$ pour tout $j \neq k$. En particulier :

Si $i = k$: aucun facteur $(x_k - x_j)$ ne s'annule, et le rapport vaut $\dfrac{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} = 1$.

Si $i \neq k$: le facteur $(x_i - x_i) = 0$ apparaît au numérateur, donc $L_k(x_i) = 0$.

Base de $\mathcal{P}_n$. Chaque L_k est un produit de n facteurs linéaires, donc $\deg(L_k) = n$. La famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ contient $n + 1$ polynômes dans l'espace $\mathcal{P}_n$ de dimension $n + 1$. Il suffit de vérifier leur indépendance linéaire. Si $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = 0$, alors en évaluant en x_i : $\lambda_i = 0$ pour tout i. La famille est donc libre, et comme elle a le bon cardinal, c'est une base de $\mathcal{P}_n$. ■

4.2.3 Formule de Lagrange

Théorème 4.2.1: Polynôme interpolateur de Lagrange

L'unique polynôme $P_n \in \mathcal{P}_n$ vérifiant $P_n(x_i) = y_i$ pour $0 \leq i \leq n$ est donné par la **formule d'interpolation de Lagrange** :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, L_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.}$$

Démonstration. Existence (conditions d'interpolation). Évaluation en x_i :

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, L_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, \delta_{ki} = y_i.$$

Unicité. Supposons qu'il existe un autre polynôme $Q_n \in \mathcal{P}_n$ vérifiant les mêmes conditions. Posons $R = P_n - Q_n \in \mathcal{P}_n$. Alors $R(x_i) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$: R est un polynôme de degré $\leq n$ admettant $n+1$ racines distinctes. Ceci implique $R = 0$, i.e. $P_n = Q_n$.

■

Exemple 1: Interpolation de Lagrange sur 3 points

Soient les données d'interpolation :

$$(x_0, y_0) = (0,\, 1), \quad (x_1, y_1) = (1,\, 3), \quad (x_2, y_2) = (2,\, 2).$$

Construction des polynômes de base :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}, \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \\
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}, \\
&= \frac{x(x-2)}{-1}, \\
&= -x(x-2), \\
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}, \\
&= \frac{x(x-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Polynôme interpolateur :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} + 3 \cdot \Big[-x(x-2)\Big] + 2 \cdot \frac{x(x-1)}{2} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{2} - 3x^2 + 6x + x^2 - x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 - 3x^2 + 6x + x^2 - x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1. \end{aligned}$$

Vérification : $P_2(0) = 1$, $P_2(1) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} + 1 = 3$, $P_2(2) = -6 + 7 + 1 = 2$.

Remarque 1: Avantage principal :

* La formule est explicite et ne nécessite pas de résoudre un système d'équations.
* Pour calculer P_n, il faut effectuer plusieurs produits et additions, ce qui devient de plus en plus long quand le nombre de points augmente.
* Si on ajoute un nouveau point d'interpolation, il faut recalculer entièrement les polynômes de base, ce qui rend la méthode peu pratique dans ce cas.

4.3 Algorithme de Newton et différences divisées

4.3.1 Motivation : vers une base triangulaire

La base de Newton consiste à écrire P_n dans la base

$$\{1,\ (x-x_0),\ (x-x_0)(x-x_1),\ \ldots,\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$$

de $\mathcal{P}_n$, que l'on note $\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n\}$ avec :

$$\omega_0(x) = 1, \qquad \omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Cette famille possède une propriété triangulaire essentielle :

$$\omega_k(x_i) = 0, \qquad \text{pour tout } i < k.$$

Autrement dit, chaque polynôme ω_k s'annule aux points $x_0, \ldots, x_{k-1}$.

4.3.2 Base de Newton

Théorème 4.3.1: Base de Newton

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\omega_0(x) = 1, \qquad \omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Alors la famille

$$(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

forme une base de l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

4.3.3 Différences divisées

Définition 4.3.1: Différences divisées

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des nœuds deux à deux distincts et f une fonction définie en ces nœuds. On définit les **différences divisées** de f par récurrence :

i) Ordre 0 : $f[x_i] = f(x_i) = y_i$ pour $0 \le i \le n$.
ii) Ordre k ($k \ge 1$) :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Proposition 4.3.1: Symétrie des différences divisées

Les différences divisées sont **symétriques** par rapport à leurs arguments : pour toute permutation σ de $\{i, i+1, \dots, i+k\}$,

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = f[x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(i+k)}].$$

4.3.4 Construction du polynôme de Newton

Théorème 4.3.2: Interpolation de Newton

L'unique polynôme interpolateur $P_n \in \mathcal{P}_n$ s'exprime dans la base de Newton sous la forme :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k]\, \omega_k(x),}$$

où $\omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ et les coefficients $c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ sont les différences divisées d'ordre k calculées à partir du nœud x_0.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation ($n = 0$). $P_0(x) = f[x_0] = y_0$ est un polynôme constant qui satisfait $P_0(x_0) = y_0$.

Hérédité. Supposons que $P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f[x_0, \ldots, x_k]\, \omega_k(x)$ est l'unique polynôme de degré $\leq n-1$ interpolant f aux nœuds $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Posons :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + c_n\, \omega_n(x), \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Par construction, $P_n \in \mathcal{P}_n$ et $P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i) = y_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$ (car $\omega_n(x_i) = 0$ pour $i < n$). La condition $P_n(x_n) = y_n$ impose :

$$P_{n-1}(x_n) + c_n\, \omega_n(x_n) = y_n \implies c_n = \frac{y_n - P_{n-1}(x_n)}{\omega_n(x_n)}.$$

On montre (par la formule symétrique des différences divisées) que cette valeur est exactement $c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. L'unicité découle de la liberté de la base de Newton dans $\mathcal{P}_n$. ■

On peut donc déterminer les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n$ par substitutions successives, et l'ajout d'un nouveau nœud x_{n+1} ne nécessite que le calcul d'un seul coefficient supplémentaire.

4.3.5 Algorithme des différences divisées et tableau de Newton

En pratique, les différences divisées sont organisées dans un **tableau triangulaire** :

Table des différences divisées de Newton

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Les coefficients de Newton sont la **diagonale supérieure** du tableau : $c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Remarque 2: Intérêt et efficacité de la méthode de Newton.

i) Le calcul du tableau des différences divisées demande un nombre important de calculs, surtout lorsque le nombre de points augmente.

ii) Si on ajoute un nouveau point, il suffit de compléter une nouvelle colonne du tableau sans tout recalculer, ce qui rend la méthode pratique pour les calculs successifs.

Exemple 2:Construction du tableau de Newton sur 4 points

Soient les données :

$$(x_0, y_0) = (0, 1), \quad (x_1, y_1) = (1, 3), \quad (x_2, y_2) = (2, 2), \quad (x_3, y_3) = (3, 5).$$

Tableau des différences divisées :

x_i	$f[x_i]$	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
0	**1**			
		2		
1	3		$-\frac{3}{2}$	
		-1		$\frac{7}{6}$
2	2		2	
		3		
3	5			

Les coefficients de Newton (extraits de la première diagonale) sont : $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, et $c_3 = \frac{7}{6}$.

Polynôme interpolateur : Le polynôme de Newton s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} P_3(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x - 1) + \frac{7}{6}x(x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Vérification en $x = 3$:

$$\begin{aligned} P_3(3) &= 1 + 2(3) - \frac{3}{2}(3)(2) + \frac{7}{6}(3)(2)(1) \\ &= 1 + 6 - 9 + 7 \\ &= 5. \end{aligned}$$

La condition d'interpolation $P_3(3) = y_3$ est désormais parfaitement satisfaite.

Note méthodologique : La précision du tableau des différences divisées est cruciale. Une erreur mineure sur un coefficient d'ordre inférieur se propage de manière itérative, ce qui rend la vérification finale sur les points d'appui indispensable pour valider la stabilité numérique du modèle.

Lemme 4.3.1:Relation entre différences divisées et dérivée

Si $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ et si $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ sont deux à deux distincts, alors il existe $\xi \in]\min_i x_i, \max_i x_i[$ tel que :

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

4.4 Analyse de l'erreur d'interpolation

4.4.1 Définition de l'erreur

Définition 4.4.1: Erreur d'interpolation

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ et $P_n \in \mathcal{P}_n$ son polynôme interpolateur aux nœuds $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. On définit le **polynôme nœudal** :

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$

L'**erreur d'interpolation** en un point $x \in [a,b]$ est $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

4.4.2 Formule exacte de l'erreur

Théorème 4.4.1: Formule de l'erreur d'interpolation

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ et P_n son polynôme interpolateur aux nœuds $x_0, \ldots, x_n$. Pour tout $x \in [a,b]$ distinct des nœuds, il existe $\xi_x \in]\min(x, x_0, \ldots, x_n), \max(x, x_0, \ldots, x_n)[$ tel que :

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x).}$$

Corollaire 4.4.1: Majoration de l'erreur

Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'on dispose d'une borne

$$M_{n+1} = \max_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|,$$

alors pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\omega_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Remarque 3: Interprétation et connexion avec Newton.

En remarquant que $f[x_0, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ (lemme de la section précédente), la formule de l'erreur se réécrit :

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,\omega_{n+1}(x).$$

Cela confirme que le polynôme de Newton à $n+2$ nœuds est obtenu en ajoutant exactement le terme d'erreur $f[x_0, \ldots, x_n, x]\,\omega_{n+1}(x)$ au polynôme à $n+1$ nœuds.

Bibliographie

[1] **Bannouna**, J.
Notes de cours : Analyse Numérique.
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Dhar Mahraz, Fès. Département de Mathématiques — Deuxième année SMA (S4), 2015–2016.

[2] **Pujo-Menjouet**, L.
Analyse Numérique — Troisième année de Licence.
Université Claude Bernard Lyon I, Licence Sciences, Technologies & Santé, Spécialité Mathématiques. 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France.
pujo@math.univ-lyon1.fr

[3] **Gallouët**, Thierry & **Herbin**, Raphaèle.
Cours d'Analyse Numérique.
Université Aix-Marseille, Licence de Mathématiques. 4 août 2023.

[4] **Manceau**, David.
Analyse Numérique Matricielle.
Licence 3 Mathématiques.

Les références sont présentées par ordre d'apparition dans le texte.