UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2025/2026
Licence PC S_4
Module : Analyse Numérique

Rappels sur les matrices

Opérations, inverse, valeurs propres et normes

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 : Produit, transposée et trace

Énoncé. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Préciser les dimensions de A et B. Les produits AB et BA sont-ils définis ? Les calculer.
2. Calculer A^{T} et B^{T}, puis vérifier $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$.
3. Calculer $\operatorname{tr}(AB)$ et $\operatorname{tr}(BA)$. Démontrer l'identité $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$ pour $U \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $V \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
4. Calculer $C = A^{\mathsf{T}}A$ et vérifier que C est symétrique.

1) Dimensions et produits

On a $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$. Ainsi $AB \in M_2(\mathbb{R})$ et $BA \in M_3(\mathbb{R})$ sont tous deux définis.

Rappel. Le coefficient (i,j) d'un produit est le produit scalaire de la ligne i de la première matrice avec la colonne j de la seconde.

Par exemple, $(AB)_{11} = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times (-1) = -1$. On obtient

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux produits n'ont pas la même taille ; on ne peut donc pas écrire $AB = BA$. Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

2) Transposition

La transposition échange lignes et colonnes :

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = (AB)^{\mathsf{T}}.$$

3) Trace d'un produit

La trace est la somme des coefficients diagonaux. Donc

$$\operatorname{tr}(AB) = -1 + 3 = 2, \qquad \operatorname{tr}(BA) = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Pour les matrices générales $U = (u_{ij})$ et $V = (v_{ji})$ de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(UV) &= \sum_{i=1}^{m} (UV)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} v_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} v_{ji} u_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (VU)_{jj} = \operatorname{tr}(VU). \end{aligned}$$

Cette identité reste vraie lorsque UV et VU n'ont pas la même taille.

4) Matrice symétrique associée

$$\boxed{C = A^{\mathsf{T}} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.}$$

On constate que $c_{ij} = c_{ji}$, donc $C^{\mathsf{T}} = C$. On retrouve aussi ce résultat sans calcul :

$$(A^{\mathsf{T}} A)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} (A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} A.$$

Exercice 2 : Déterminant, inverse et système linéaire

Énoncé. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$ et en déduire que A est inversible.
2. Déterminer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.
3. Résoudre $Ax = b$ en utilisant la matrice inverse et vérifier la solution.
4. Calculer les mineurs principaux dominants de A. La matrice A est-elle symétrique définie positive ?

1) Déterminant et inversibilité

En développant suivant la première ligne,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Ainsi $\det A \neq 0$ et A est inversible.

2) Inverse par Gauss-Jordan

On travaille sur $(A \mid I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3) Résolution du système

L'unique solution est

$$x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 - 4 + 3 \\ -2 + 4 - 3 \\ 1 - 2 + 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Vérification :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 2 - 2 + 2 \\ -1 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b.$$

4) Mineurs principaux et définie positivité

La matrice A est symétrique et

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_3 = \det A = 1.$$

Critère de Sylvester. Une matrice réelle symétrique est définie positive si et seulement si ses mineurs principaux dominants sont tous strictement positifs.

Les trois mineurs sont positifs. Donc A **est symétrique définie positive**.

Exercice 3 : Valeurs propres et matrice à paramètre

Énoncé. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$M_t = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_{M_t}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M_t)$ et les valeurs propres de M_t.
2. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres et écrire $M_t = Q\Lambda_t Q^{\mathsf{T}}$ avec Q orthogonale.
3. Pour quelles valeurs de t la matrice est-elle inversible ? Déterminer son rang et son noyau lorsqu'elle n'est pas inversible.
4. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles M_t est définie positive. Confirmer le résultat par le critère de Sylvester.

1) Polynôme caractéristique

En développant suivant la troisième ligne,

$$\chi_{M_t}(\lambda) = (\lambda - 3)\big((\lambda - 2)^2 - t^2\big) = (\lambda - 3)(\lambda - 2 - t)(\lambda - 2 + t).$$

Les valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités, sont

$$\boxed{\lambda_1 = 2 + t, \qquad \lambda_2 = 2 - t, \qquad \lambda_3 = 3.}$$

2) Diagonalisation orthogonale

Un calcul direct montre que

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vérifient $M_t v_j = \lambda_j v_j$. Ils sont deux à deux orthogonaux et de norme euclidienne 1. Ils forment donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_t = \operatorname{diag}(2 + t, 2 - t, 3).$$

Alors $Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$, $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$ et

$$\boxed{Q^{\mathsf{T}} M_t Q = \Lambda_t, \qquad M_t = Q\Lambda_t Q^{\mathsf{T}}.}$$

Cette base convient également lorsque des valeurs propres coïncident ($t = 0$, $t = 1$ ou $t = -1$).

3) Inversibilité, rang et noyau

$$\det M_t = 3(2 + t)(2 - t) = 3(4 - t^2).$$

Ainsi M_t est inversible si et seulement si $t \notin \{-2, 2\}$.

- Si $t = 2$, les valeurs propres sont $4, 0, 3$. Donc

$$\operatorname{rang}(M_2) = 2, \qquad \ker(M_2) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Si $t = -2$, les valeurs propres sont $0, 4, 3$. Donc

$$\operatorname{rang}(M_{-2}) = 2, \qquad \ker(M_{-2}) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

4) Définie positivité

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Ici, cela donne

$$2 + t > 0, \quad 2 - t > 0, \quad 3 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < t < 2.$$

Par ailleurs, les mineurs principaux dominants sont

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = 4 - t^2, \qquad \Delta_3 = 3(4 - t^2).$$

Le critère de Sylvester donne exactement la même condition.

$$\boxed{M_t \text{ est définie positive} \quad \Longleftrightarrow \quad |t| < 2.}$$

Pour $t = \pm 2$, la matrice est seulement positive semi-définie, car elle possède une valeur propre nulle.

Exercice 4 : Normes vectorielles et matricielles

Énoncé. On considère

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
2. Calculer les normes matricielles subordonnées $\|B\|_1$ et $\|B\|_\infty$, puis la norme de Frobenius $\|B\|_F = \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2}$.
3. Déterminer les valeurs propres de B. En déduire son rayon spectral $\rho(B)$ et sa norme subordonnée euclidienne $\|B\|_2$.
4. Calculer Bx et vérifier numériquement les inégalités $\|Bx\|_p \le \|B\|_p \, \|x\|_p$ pour $p = 1, 2, \infty$.

1) Normes du vecteur

Pour $u = (u_1, \dots, u_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|u\|_1 = \sum_i |u_i|, \qquad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_i u_i^2}, \qquad \|u\|_\infty = \max_i |u_i|.$$

D'où

$$\boxed{\|x\|_1 = 5, \qquad \|x\|_2 = 3, \qquad \|x\|_\infty = 2.}$$

2) Normes de la matrice

Pour une matrice $B = (b_{ij})$,

$$\|B\|_1 = \max_j \sum_i |b_{ij}|, \qquad \|B\|_\infty = \max_i \sum_j |b_{ij}|.$$

Les sommes des valeurs absolues par colonne et par ligne sont $3, 4, 3$. Ainsi $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = 4$. Pour la norme de Frobenius, les trois termes diagonaux contribuent 3×4 et les quatre termes non nuls hors diagonale contribuent 4×1 :

$$\boxed{\|B\|_1 = 4, \qquad \|B\|_\infty = 4, \qquad \|B\|_F = \sqrt{12+4} = 4.}$$

3) Rayon spectral et norme euclidienne

En posant $s = \lambda - 2$, on calcule

$$\det(\lambda I_3 - B) = \begin{vmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} = s(s^2-1) - s = s(s^2-2).$$

Les valeurs propres sont donc 2, $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$. Elles sont toutes positives et

$$\rho(B) = 2 + \sqrt{2}.$$

Comme B est symétrique, on a

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^{\mathsf{T}} B)} = \sqrt{\rho(B^2)} = \rho(B).$$

$$\boxed{\|B\|_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4142.}$$

Attention : la norme de Frobenius $\|B\|_F$ et la norme subordonnée euclidienne $\|B\|_2$ sont distinctes ; ici $4 \neq 2 + \sqrt{2}$.

4) Vérification des inégalités de compatibilité

$$Bx = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-4-2 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On obtient les comparaisons suivantes :

$$\begin{aligned} \|Bx\|_1 &= 4 + 7 + 6 = 17 \leq 4 \times 5 = 20, \\ \|Bx\|_\infty &= 7 \leq 4 \times 2 = 8, \\ \|Bx\|_2 &= \sqrt{16 + 49 + 36} = \sqrt{101} \leq 3(2+\sqrt{2}) = \|B\|_2 \, \|x\|_2 . \end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, les deux membres sont positifs et

$$[3(2+\sqrt{2})]^2 = 54 + 36\sqrt{2} > 101.$$

Numériquement, $\sqrt{101} \approx 10{,}0499$ et $3(2+\sqrt{2}) \approx 10{,}2426$. Les trois inégalités sont vérifiées.

Document rédigé par Mohamed Najib LAATABI — UM5 Rabat, Faculté des Sciences

---