Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2025/2026
Licence PC S_4
Module : Analyse Numérique

Méthodes directes et itératives

Résolution des systèmes linéaires

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 : Produit matriciel et annulateur

Énoncé. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer toutes les matrices $F \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.
2. La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier.

1) Détermination des matrices F

Rappel. Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit $C = AB$ est défini par $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Posons $F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors

$$AF = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix}.$$

L'égalité $AF = 0$ équivaut à

$$a = b = c = 0, \qquad g = -d, \qquad h = -e, \qquad i = -f.$$

La troisième ligne du produit est alors automatiquement nulle. Réciproquement, ces conditions donnent bien $AF = 0$.

Les matrices recherchées sont exactement

$$\boxed{F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}, \qquad (d, e, f) \in \mathbb{R}^3.}$$

2) Non-inversibilité de A

Il existe une matrice $F \neq 0$ telle que $AF = 0$, par exemple en prenant $(d, e, f) = (1, 0, 0)$. Si A était inversible, la multiplication par A^{-1} donnerait $F = A^{-1}(AF) = 0$, ce qui est impossible. On peut également calculer

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, **la matrice A n'est pas inversible**.

Exercice 2 : Inversibilité d'une matrice

Énoncé. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Vérifier que $A^2 = 2I_3 + A$, puis en déduire A^{-1}.
3. Retrouver A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.

1) Calcul du déterminant

En développant suivant la première ligne,

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) + 1 = 2 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

2) Utilisation d'une identité polynomiale

Le calcul direct donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + A.$$

Ainsi $A(A - I_3) = 2I_3$, d'où

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

3) Méthode de Gauss-Jordan

On effectue sur la matrice augmentée $(A \mid I_3)$ des opérations élémentaires sur les lignes jusqu'à obtenir $(I_3 \mid A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow -\frac{1}{2}L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[L_2\leftarrow L_2-L_3]{L_1\leftarrow L_1-L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

On retrouve bien la matrice inverse calculée précédemment.

Exercice 3 : Mineurs principaux et positivité

Énoncé. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les mineurs principaux dominants de A_α.
2. Vérifier que A_α est symétrique et déterminer les valeurs de α pour lesquelles elle est définie positive.

1) Mineurs principaux dominants

Les deux premiers mineurs sont

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2.$$

Pour le troisième, effectuons $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis factorisons $1 + 2\alpha$ dans la première colonne :

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (1+2\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1+2\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (1+2\alpha)(1-\alpha)^2. \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, on a effectué $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

2) Critère de Sylvester

On a $A_\alpha^{\mathsf{T}} = A_\alpha$.

> **Critère de Sylvester.** Une matrice réelle symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux dominants sont strictement positifs.

La condition $\Delta_2 > 0$ donne $-1 < \alpha < 1$. Sur cet intervalle, $(1-\alpha)^2 > 0$, donc $\Delta_3 > 0$ équivaut à $1 + 2\alpha > 0$.

$$\boxed{A_\alpha \text{ est définie positive} \iff -\frac{1}{2} < \alpha < 1.}$$

Exercice 4 : Normes matricielles et rayon spectral

Énoncé. Partie I. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\rho(B) \leq \|B\|$ pour toute norme matricielle sous-multiplicative.
2. Montrer que, si B est symétrique, alors $\|B\|_2 = \rho(B)$.

Partie II. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\|A\|_1$ et $\|A\|_\infty$.
2. Déterminer les valeurs propres de A, puis calculer $\|A\|_2$.

Partie III. Soient $C \in M_n(\mathbb{R})$ et $x^{(k+1)} = Cx^{(k)}$, avec $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $x^{(k)} = C^k x^{(0)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que, si $\rho(C) < 1$, alors $x^{(k)} \longrightarrow 0$.

Partie I : Propriétés générales

Le rayon spectral est $\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}$, les valeurs propres étant considérées dans $\mathbb{C}$. Les normes usuelles subordonnées sont

$$\|B\|_1 = \max_j \sum_i |b_{ij}|, \qquad \|B\|_\infty = \max_i \sum_j |b_{ij}|, \qquad \|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^{\mathsf{T}}B)}.$$

1) Majoration du rayon spectral. Pour une norme matricielle sous-multiplicative, on a $\left\|B^k\right\| \leq \|B\|^k$. La formule du rayon spectral donne

$$\rho(B) = \lim_{k\to\infty} \left\|B^k\right\|^{1/k} \leq \|B\|.$$

Pour une norme subordonnée sur $\mathbb{C}^n$, on peut aussi utiliser un vecteur propre $v \neq 0$: $|\lambda|\,\|v\| = \|Bv\| \leq \|B\|\,\|v\|$.

2) Cas symétrique. Si $B = B^{\mathsf{T}}$, le théorème spectral assure que ses valeurs propres sont réelles et que celles de B^2 sont leurs carrés. Ainsi

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^{\mathsf{T}}B)} = \sqrt{\rho(B^2)} = \sqrt{\rho(B)^2} = \rho(B).$$

Partie II : Application à la matrice A

1) Normes 1 et ∞. Les sommes des valeurs absolues des coefficients des colonnes, comme des lignes, sont 5, 6 et 5. Donc

$$\boxed{\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 6.}$$

2) Valeurs propres et norme euclidienne. En posant $t = 4 - \lambda$, on obtient

$$\det(A - \lambda I_3) = t(t^2 - 1) - t = t(t^2 - 2).$$

Les valeurs propres sont donc 4, $4 - \sqrt{2}$ et $4 + \sqrt{2}$. Comme A est symétrique,

$$\boxed{\rho(A) = \|A\|_2 = 4 + \sqrt{2}.}$$

Partie III : Suite récurrente

1) Expression de $x^{(k)}$. Pour $k = 0$, $C^0 x^{(0)} = x^{(0)}$. Si $x^{(k)} = C^k x^{(0)}$, alors

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} = CC^k x^{(0)} = C^{k+1} x^{(0)}.$$

Le résultat est établi par récurrence.

2) Convergence.

Pour une matrice carrée C, on a $C^k \longrightarrow 0$ si et seulement si $\rho(C) < 1$.

Par conséquent, si $\rho(C) < 1$, alors

$$\boxed{x^{(k)} = C^k x^{(0)} \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}^n.}$$

Exercice 5 : Circuit électrique et décomposition LU

Énoncé. Les intensités i_1, i_2, i_3, exprimées en ampères, vérifient le système

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = 2, \\ i_1 + 2i_2 + i_3 = 2, \\ i_2 + 3i_3 = 4. \end{cases}$$

1. Écrire le système sous la forme $Ai = b$.
2. Justifier l'existence d'une factorisation $A = LU$ sans pivotement, avec L triangulaire inférieure à diagonale unité.
3. Déterminer L et U, puis résoudre le système par descente et remontée.

1) Forme matricielle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2) Existence de la factorisation LU

Les mineurs principaux dominants sont

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_3 = \det A = 5 - 3 = 2.$$

Ils sont tous non nuls : la factorisation LU sans pivotement existe et est unique lorsque la diagonale de L est imposée égale à 1.

3) Factorisation et résolution

Élimination de Gauss. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $A = E_1^{-1} E_2^{-1} U = LU$, avec

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Ces facteurs s'obtiennent également par la méthode de Doolittle, en identifiant les coefficients de $A = LU$:

$$u_{11} = u_{12} = 1,\ u_{13} = 0, \quad \ell_{21} = 1,\ \ell_{31} = 0, \quad u_{22} = u_{23} = 1,\ \ell_{32} = 1,\ u_{33} = 2.$$

Descente : résolution de $Ly = b$.

$$\begin{cases} y_1 = 2, \\ y_1 + y_2 = 2, \\ y_2 + y_3 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Remontée : résolution de $Ui = y$.

$$\begin{cases} 2i_3 = 4, \\ i_2 + i_3 = 0, \\ i_1 + i_2 = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad i = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{i_1 = 4\,\text{A}, \qquad i_2 = -2\,\text{A}, \qquad i_3 = 2\,\text{A}.}$$

Le signe négatif de i_2 indique un sens réel opposé au sens choisi.

Exercice 6 : Factorisation de Cholesky

Énoncé. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les mineurs principaux dominants de M_α et déterminer les valeurs de α pour lesquelles elle est définie positive.
2. On prend $\alpha = 1$.
   a) Déterminer la factorisation de Cholesky $M_1 = BB^{\mathsf{T}}$, avec B triangulaire inférieure à diagonale strictement positive.
   b) Résoudre $M_1 x = b$ pour $b = (1, -8, 25)^{\mathsf{T}}$.

1) Définie positivité de la matrice

La matrice est symétrique. Ses mineurs principaux dominants sont

$$\Delta_1 = \alpha, \qquad \Delta_2 = 8\alpha - 4, \qquad \Delta_3 = \alpha(200 - 36) - 100 = 164\alpha - 100.$$

D'après le critère de Sylvester, ils doivent tous être strictement positifs :

$$\alpha > 0, \qquad \alpha > \frac{1}{2}, \qquad \alpha > \frac{25}{41}.$$

Comme $25/41 > 1/2$, on obtient

$$\boxed{M_\alpha \text{ est définie positive} \iff \alpha > \frac{25}{41}.}$$

2a) Factorisation de Cholesky pour le paramètre 1

Puisque $1 > 25/41$, la factorisation existe. Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \qquad b_{11}, b_{22}, b_{33} > 0.$$

L'identification dans $M_1 = BB^{\mathsf{T}}$ donne successivement

$$\begin{aligned} b_{11}^2 &= 1 && \Longrightarrow b_{11} = 1, \\ b_{21} b_{11} &= -2 && \Longrightarrow b_{21} = -2, \\ b_{31} b_{11} &= 0 && \Longrightarrow b_{31} = 0, \\ b_{21}^2 + b_{22}^2 &= 8 && \Longrightarrow b_{22} = 2, \\ b_{31} b_{21} + b_{32} b_{22} &= -6 && \Longrightarrow b_{32} = -3, \\ b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 &= 25 && \Longrightarrow b_{33} = 4. \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2b) Résolution du système

On pose $y = B^{\mathsf{T}}x$. La descente $By = b$ donne

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ -2y_1 + 2y_2 = -8, \\ -3y_2 + 4y_3 = 25 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La remontée $B^{\mathsf{T}}x = y$ donne

$$\begin{cases} 4x_3 = 4, \\ 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

La vérification directe donne bien $M_1(1,0,1)^{\mathsf{T}} = (1,-8,25)^{\mathsf{T}}$.

Exercice 7 : Convergence des méthodes itératives

Énoncé. On considère

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 \\ \alpha & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c > 0, \qquad \alpha^2 < ac.$$

Pour résoudre $Ax = d$, on utilise les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

1. Justifier la convergence des deux méthodes pour tout vecteur initial.
2. Comparer leurs facteurs asymptotiques de convergence. Traiter le cas particulier $\alpha = 0$.

1) Matrices d'itération et convergence

Avec la convention $A = D - E - F$, où D est diagonale et E, F sont respectivement strictement triangulaires inférieure et supérieure,

$$J = D^{-1}(E + F), \qquad G = (D - E)^{-1}F.$$

L'itération stationnaire converge pour tout vecteur initial si et seulement si le rayon spectral de sa matrice d'itération est strictement inférieur à 1.

Les mineurs principaux dominants de A sont a, ab et $b(ac - \alpha^2)$, tous strictement positifs. Ainsi A est symétrique définie positive, ce qui assure notamment la convergence de Gauss-Seidel.

Méthode de Jacobi. On obtient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha/a \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\lambda I_3 - J) = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{ac}\right).$$

Ses valeurs propres sont 0 et $\pm|\alpha|/\sqrt{ac}$, donc

$$\boxed{\rho(J) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}} < 1.}$$

Jacobi converge donc aussi pour cette matrice.

Méthode de Gauss-Seidel. Les équations successives sont

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (d_1 - \alpha x_3^{(k)})/a, \\ x_2^{(k+1)} = d_2/b, \\ x_3^{(k+1)} = (d_3 - \alpha x_1^{(k+1)})/c. \end{cases}$$

En substituant la première dans la troisième, la matrice d'itération est

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha/a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2/(ac) \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\rho(G) = \frac{\alpha^2}{ac} < 1.}$$

2) Comparaison des vitesses de convergence

On a $\rho(G) = \rho(J)^2$. Si $\alpha \neq 0$, alors $0 < \rho(J) < 1$, donc

$$\rho(G) < \rho(J).$$

> Pour $\alpha \neq 0$, Gauss-Seidel possède un facteur asymptotique de convergence plus petit que celui de Jacobi. Il est donc plus rapide au sens de ce critère spectral.

Si $\alpha = 0$, la matrice A est diagonale et $J = G = 0$: les deux méthodes donnent la solution exacte après une itération, quel que soit le point initial.

Exercice 8 : Application de Gauss-Seidel

Énoncé. On considère le système, écrit dans l'ordre utilisé pour l'itération,

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10, \\ -2x_1 + 10x_3 = 7. \end{cases}$$

1. Écrire $Ax = b$ et vérifier que A est à diagonale strictement dominante.
2. Déterminer la matrice M_{GS} et le vecteur c_{GS} de l'itération $x^{(k+1)} = M_{\mathrm{GS}}x^{(k)} + c_{\mathrm{GS}}$.
3. Justifier la convergence pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.
4. Calculer les deux premières itérations à partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathsf{T}}$.

1) Matrice et dominance diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ligne par ligne, on vérifie $10 > 1$, $10 > 1 + 2$ et $10 > 2$. La matrice A est donc à diagonale strictement dominante.

2) Formules de Gauss-Seidel

Les nouvelles composantes sont utilisées dès qu'elles sont disponibles :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{9 + x_2^{(k)}}{10}, \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{10 + x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)}}{10}, \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{7 + 2x_1^{(k+1)}}{10}. \end{cases}$$

En substituant l'expression de $x_1^{(k+1)}$, on obtient

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}x_2^{(k)} + \dfrac{9}{10}, \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{100}x_2^{(k)} + \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} + \dfrac{109}{100}, \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{50}x_2^{(k)} + \dfrac{22}{25}. \end{cases}$$

$$\boxed{M_{\mathrm{GS}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{50} & 0 \end{pmatrix}, \qquad c_{\mathrm{GS}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{109}{100} \\ \frac{22}{25} \end{pmatrix}.}$$

3) Convergence

La dominance diagonale stricte de A garantit la convergence de Gauss-Seidel pour tout vecteur initial. On peut aussi vérifier directement

$$\|M_{\mathrm{GS}}\|_\infty = \max\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100} + \frac{1}{5}, \frac{1}{50}\right) = \frac{21}{100} < 1.$$

Ainsi $\rho(M_{\mathrm{GS}}) \leq \|M_{\mathrm{GS}}\|_\infty < 1$.

4) Deux premières itérations

Première itération.

$$x_1^{(1)} = \frac{9}{10} = 0{,}9, \qquad x_2^{(1)} = \frac{10 + 0{,}9}{10} = 1{,}09, \qquad x_3^{(1)} = \frac{7 + 2(0{,}9)}{10} = 0{,}88.$$

Deuxième itération.

$$x_1^{(2)} = \frac{9 + 1{,}09}{10} = 1{,}009,$$
$$x_2^{(2)} = \frac{10 + 1{,}009 + 2(0{,}88)}{10} = 1{,}2769,$$
$$x_3^{(2)} = \frac{7 + 2(1{,}009)}{10} = 0{,}9018.$$

$$\boxed{x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}09 \\ 0{,}88 \end{pmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}009 \\ 1{,}2769 \\ 0{,}9018 \end{pmatrix}.}$$

Document rédigé par Mohamed Najib LAATABI — UM5 Rabat, Faculté des Sciences