UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2025/2026
Licence PC S_4
Module : Analyse Numérique

Zéros de fonctions non linéaires : méthodes numériques

Dichotomie • Point fixe • Newton • Sécante • Ordre de convergence

Exercice 1 : Solutions approchées par Dichotomie

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation complet de f en justifiant les calculs de limites aux bornes.
2. Montrer que l'équation (E_1) : $f(x) = 0$ possède une unique solution $\bar{x}$ dans l'intervalle $I = [-2, -1]$ et que c'est même l'unique solution de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$.
3. Justifier qu'à partir de 4 itérations de l'algorithme de Dichotomie, on obtient une approximation de $\bar{x}$ à la précision $\varepsilon = 0{,}1$ (Test d'arrêt : $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$). Puis vérifier cela en appliquant la méthode à la main sur l'intervalle I.

1) Variations de f sur $\mathbb{R}$

La fonction f es dérivable sur $\mathbb{R}$, on calcule f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x, \\ &= 3x(x-2). \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

2) Unique solution dans $I = [-2, -1]$ et dans $\mathbb{R}$

- **Existence.**

$$f(-2) = -15 < 0 \quad \text{et} \quad f(-1) = 1 > 0.$$

f est continue et change de signe sur $[-2,-1]$, alors d'après le **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)** $\exists\, \bar{x} \in]-2,-1[$.

- **Unicité dans I.** Sur $[-2,-1]$, $x<0$ et $x-2<0$ donc $f'(x)>0$: f strictement croissante $\Rightarrow$ unicité.
- **Unicité dans $\mathbb{R}$.** D'après le tableau : sur $[0,+\infty[$, $f \geq 1 > 0$. Donc $\bar{x}$ est l'**unique racine réelle**.

3) Dichotomie : 4 itérations suffisent

D'après le théorème de la dichotomie, si l'on note $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ l'approximation à l'étape n, l'erreur absolue vérifie l'inégalité suivante :

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \geq 0$$

alors,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad n \geq 0.$$

Itérations de la Dichotomie : Pour $\epsilon = 0,1$, on cherche n tel que $\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$. Ici

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} < 0,1 &\implies 2^n > 10, \\ &\implies n \geq 4. \end{aligned}$$

On applique ensuite la méthode de dichotomie :

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

n	a_n	b_n	x_n (milieu)	$f(x_n)$	Précision $\lvert b_n - a_n\rvert$
0	-2	-1	-1.5	$-5.125 < 0$	1
1	-1.5	-1	-1.25	$-1.640625 < 0$	0.5
2	-1.25	-1	-1.125	$-0.220703 < 0$	0.25
3	-1.125	-1	-1.0625	$0.413818 > 0$	0.125
4	-1.125	-1.0625	-1.09375	$0.102692 > 0$	0.0625

Après 4 itérations : $|x_4 - x_3| = 0{,}03125 < 0{,}1$.

Exercice 2 : Application de la méthode du point fixe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10$.

On cherche à calculer de façon approchée l'unique racine positive, notée $\alpha = \sqrt{10}$, de l'équation $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe.

1. On pose $\phi_1(x) = x - f(x)$. Vérifier que α est un point fixe de ϕ_1.
2. On choisit $x_0 = 3$ et on pose $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_{2k} = -2$ et $x_{2k+1} = 4$. En déduire que la suite $(x_k)_k$ ne converge pas.
3. On introduit la fonction $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $0 < \omega < 1$. Montrer que α est un point fixe de ϕ_ω pour tout $\omega \neq 0$.
4. On choisit $\omega = \frac{1}{8}$ et $y_0 = 3$. Notons par $(y_k)_k$ la suite de point fixe associée à la fonction $\phi_{\frac{1}{8}}$. Donner sa définition ; la relation de récurrence qu'elle vérifie.

5. Montrer que $\phi_{\frac{1}{8}}$ est une contraction sur $[3,4]$. En déduire que $\phi_{\frac{1}{8}}$ admet un unique point fixe α dans $[3,4]$ et que la suite $(y_k)_k$ converge vers α pour tout $y_0 \in [3,4]$.
6. Déterminer la nature du point fixe α (attractif ou répulsif). La convergence est-elle linéaire ou quadratique ? Justifier.

1) Vérification du point fixe α pour ϕ_1

On pose $\phi_1(x) = x - f(x)$. Évaluons ϕ_1 en α sachant que α est racine de f (donc $f(\alpha) = 0$) :

$$\begin{aligned}\phi_1(\alpha) &= \alpha - f(\alpha)\\ &= \alpha - 0\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Donc, α est bien un **point fixe** de la fonction ϕ_1.

2) Comportement de la suite (x_k) avec $x_0 = 3$

La suite est définie par $x_0 = 3$ et $x_{k+1} = \phi_1(x_k) = x_k - x_k^2 + 10$. Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 - 3^2 + 10 = 4\\ x_2 &= 4 - 4^2 + 10 = 4 - 16 + 10 = -2\\ x_3 &= -2 - (-2)^2 + 10 = -2 - 4 + 10 = 4\end{aligned}$$

Démonstration par récurrence : Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $x_{2k} = -2$ et $x_{2k+1} = 4$.

- *Initialisation ($k = 1$)* : $x_2 = -2$ et $x_3 = 4$. La propriété est vraie.
- *Hérédité* : Supposons que pour un $k \geq 1$, $x_{2k} = -2$ et $x_{2k+1} = 4$. Au rang $k+1$, on a :

$$x_{2(k+1)} = x_{2k+2} = \phi_1(x_{2k+1}) = \phi_1(4) = 4 - 16 + 10 = -2$$

$$x_{2(k+1)+1} = x_{2k+3} = \phi_1(x_{2k+2}) = \phi_1(-2) = -2 - 4 + 10 = 4$$

  La propriété est donc héréditaire.
- D'après principe de récurrence la suite $(x_k)_k$ oscille indéfiniment entre les valeurs -2 et 4. Elle **ne converge donc pas** vers α.

3) Point fixe de la fonction ϕ_ω

On introduit $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $0 < \omega < 1$. Soit $\omega \neq 0$. Évaluons $\phi_\omega(\alpha)$:

$$\phi_\omega(\alpha) = \alpha - \omega f(\alpha) = \alpha - \omega(0) = \alpha.$$

Par conséquent, α reste un **point fixe** de ϕ_ω pour tout $\omega \neq 0$.

4) Définition et récurrence de la suite (y_k)

Pour $\omega = \frac{1}{8}$, on considère la fonction $\phi_{\frac{1}{8}}(x) = x - \frac{1}{8}(x^2 - 10)$.

- **Définition :** La suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des itérés de la méthode du point fixe associée à la fonction d'itération $\phi_{\frac{1}{8}}$ avec pour point de départ $y_0 = 3$.
- **Relation de récurrence :** Elle est définie par :

$$\begin{cases} y_0 = 3 \\ y_{k+1} = y_k - \dfrac{1}{8}\left(y_k^2 - 10\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

5) Contraction et convergence (Théorème de Banach)

Étudions la dérivée de $\phi_{\frac{1}{8}}$:

$$\phi'_{\frac{1}{8}}(x) = 1 - \frac{2x}{8} = 1 - \frac{x}{4}.$$

La fonction $\phi_{\frac{1}{8}}$ est continue et strictement croissante sur $[3,4]$ (car sa dérivée $\phi'_{\frac{1}{8}}(x) = 1 - \frac{x}{4} \geq 0$ sur cet intervalle).

- $\phi_{\frac{1}{8}}(3) = 3 - \frac{1}{8}(3^2 - 10) = 3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$
- $\phi_{\frac{1}{8}}(4) = 4 - \frac{1}{8}(4^2 - 10) = 4 - \frac{6}{8} = 3{,}25$

On a donc

$$\phi_{\frac{1}{8}}([3,4]) = [\phi_{\frac{1}{8}}(3), \phi_{\frac{1}{8}}(4)] = [3{,}125\,;\,3{,}25] \subset [3,4].$$

L'intervalle est **stable**. Calculons la dérivée de $\phi_{\frac{1}{8}}$:

$$\begin{aligned}\phi'_{\frac{1}{8}}(x) &= 1 - \frac{1}{8}(2x),\\ &= 1 - \frac{x}{4}.\end{aligned}$$

Sur $[3,4]$, $|\phi'_{\frac{1}{8}}(x)| = 1 - \frac{x}{4}$ est une fonction décroissante. Son maximum est atteint en $x = 3$:

$$\begin{aligned}\max_{x\in[3,4]} |\phi'_{\frac{1}{8}}(x)| &= |\phi'_{\frac{1}{8}}(3)|,\\ &= 1 - \frac{3}{4},\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

En appliquant l'**Inégalité des Accroissements Finis** à la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $\phi_{\frac{1}{8}}$ sur l'intervalle $[3,4]$, entre x et y, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|\phi_{\frac{1}{8}}(x) - \phi_{\frac{1}{8}}(y)| &\leq \left(\max_{\xi\in[3,4]} |\phi'_{\frac{1}{8}}(\xi)|\right)|x-y|,\\ &\leq \frac{1}{4}|x-y|.\end{aligned}$$

Comme $k = \frac{1}{4} < 1$, $\phi_{\frac{1}{8}}$ est **strictement contractante** sur $[3,4]$.

On retrouve ainsi la conclusion du **Théorème du point fixe de Banach** : la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α pour tout choix initial $y_0 \in [3,4]$.

6) Nature du point fixe et vitesse de convergence

Comme $y_k \to \alpha$. Le point fixe α est donc **attractif**.

On a $\phi_{\frac{1}{8}}$ une fonction d'itération de classe $\mathcal{C}^1$ et $0 < |\phi'_{\frac{1}{8}}(\alpha)| < 1$. Soit l'erreur $e_k = y_k - \alpha$.

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange (théorème des accroissements finis) à $\phi_{\frac{1}{8}}$ entre y_k et α, il existe un réel ζ_k strictement compris entre y_k et α tel que :

$$\phi_{\frac{1}{8}}(y_k) = \phi_{\frac{1}{8}}(\alpha) + (y_k - \alpha)\phi'_{\frac{1}{8}}(\zeta_k) \quad \Longleftrightarrow \quad y_{k+1} - \alpha = (y_k - \alpha)\phi'_{\frac{1}{8}}(\zeta_k)$$

En passant aux valeurs absolues, la relation d'erreur s'écrit :

$$|e_{k+1}| = |e_k|\,|\phi'_{\frac{1}{8}}(\zeta_k)|$$

Puisque $y_k \to \alpha$ et que ζ_k est encadré par y_k et α, le théorème des gendarmes impose que $\zeta_k \to \alpha$. Par continuité de la dérivée, le ratio asymptotique des erreurs donne :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \lim_{k\to\infty} |\phi'_{\frac{1}{8}}(\zeta_k)| = |\phi'_{\frac{1}{8}}(\alpha)|$$

Puisque cette limite est une constante strictement comprise entre 0 et 1 (dans notre cas, égale a $1 - \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0{,}21 \neq 0$), l'erreur à l'étape $k+1$ est proportionnelle à l'erreur à l'étape k. La convergence est donc strictement **linéaire** (d'ordre 1).

Exercice 3 : Ordre de convergence

Considérons les fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{\frac{2}{x+1}}, \quad x \in [1,2].$$

1. Montrer que l'unique racine réelle $\bar{x}$ de $f(x) = 0$ dans $[1,2]$ est un point fixe de g.
2. Montrer que l'itération $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ converge vers $\bar{x}$ pour tout $x^{(0)} \in [1,2]$.
3. Quel est l'ordre de convergence de la suite $(x^{(k)})_k$ vers $\bar{x}$? Justifier votre réponse.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

1) Équivalence entre racine de f et point fixe de g

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on calcule f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x - 1, \\ &= (x-1)(3x+1). \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 1.$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{22}{27}$	↘	-2	↗	$+\infty$

- **Existence.**

  $$f(1) = -2 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 1 > 0.$$

  f est continue et change de signe sur $[1,2]$, alors d'après le **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)** $\exists\, \bar{x} \in]1,2[$.
- **Unicité.** Sur $]1,+\infty[$, f est strictement croissante $\Rightarrow$ unicité sur $[1,2]$.

Montrons que $f(\bar{x}) = 0 \iff g(\bar{x}) = \bar{x}$. Partons de l'équation du point fixe :

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff 1 + \sqrt{\frac{2}{x+1}} = x \\ &\iff \sqrt{\frac{2}{x+1}} = x - 1 \\ &\iff \frac{2}{x+1} = (x-1)^2 \quad (\text{car } x \in [1,2] \Rightarrow x - 1 \geq 0) \\ &\iff 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 1) \\ &\iff 2 = x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1 \\ &\iff x^3 - x^2 - x - 1 = 0, \\ &\iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique racine réelle $\bar{x}$ de f dans $[1,2]$ est l'unique point fixe de g sur cet intervalle.

2) Convergence de l'itération $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1,2]$ (car $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ décroît).

- $g(1) = 1 + \sqrt{\frac{2}{2}} = 2$
- $g(2) = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1,816 > 1$

On a donc

$$g([1,2]) = [g(2), g(1)] \subset [1,2].$$

L'intervalle est **stable**. Calculons la dérivée de g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+1)^{-3/2}, \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}(x+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Sur $[1,2]$, $|g'(x)|$ est une fonction décroissante. Son maximum est atteint en $x = 1$:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [1,2]} |g'(x)| &= |g'(1)|, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(2)^{3/2}}, \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En appliquant l'**Inégalité des Accroissements Finis** à la fonction de $\mathcal{C}^1$ g sur l'intervalle $[1,2]$, entre x et y, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq \left(\max_{\xi \in [1,2]} |g'(\xi)| \right) |x - y|, \\ &\leq \frac{1}{4} |x - y|. \end{aligned}$$

Comme $k = \frac{1}{4} < 1$, g est **strictement contractante** sur $[1,2]$. On retrouve ainsi la conclusion du **Théorème du point fixe de Banach** : la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ pour tout choix initial $x^{(0)} \in [1,2]$.

3) Détermination de l'ordre de convergence

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange (théorème des accroissements finis) à g entre $x^{(k)}$ et $\bar{x}$, il existe un réel ζ_k strictement compris entre $x^{(k)}$ et $\bar{x}$ tel que :

$$g(x^{(k)}) = g(\bar{x}) + (x^{(k)} - \bar{x})g'(\zeta_k) \quad \Longleftrightarrow \quad x^{(k+1)} - \bar{x} = (x^{(k)} - \bar{x})g'(\zeta_k)$$

En notant l'erreur à l'itération k par $e_k = x^{(k)} - \bar{x}$ et en passant aux valeurs absolues, la relation d'erreur s'écrit :

$$|e_{k+1}| = |e_k|\,|g'(\zeta_k)|$$

Puisque $x^{(k)} \to \bar{x}$ et que ζ_k est encadré par $x^{(k)}$ et $\bar{x}$, le théorème des gendarmes impose que $\zeta_k \to \bar{x}$. Par continuité de la dérivée g' sur $[1,2]$, le ratio asymptotique des erreurs donne :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \lim_{k\to\infty} |g'(\zeta_k)| = |g'(\bar{x})|$$

Nous avons établi précédemment que $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}(x+1)^{3/2}}$. Comme $\bar{x} \in [1,2]$, cette limite asymptotique est une constante strictement comprise entre 0 et 1 :

$$|g'(\bar{x})| = \frac{1}{\sqrt{2}(\bar{x}+1)^{3/2}} \neq 0$$

Puisque cette limite est non nulle, l'erreur à l'étape $k+1$ est proportionnelle à l'erreur à l'étape k. La convergence de la méthode est donc strictement **linéaire** (d'ordre 1).

Exercice 4 : Comparaison des méthodes numériques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.

1. Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\bar{x}$ sur l'intervalle $I = [1,2]$. Quelle est sa valeur exacte ?
2. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton avec $x_0 = 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.
   (b) Montrer par récurrence que $x_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis établir l'inégalité :
   $$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2$$
   (c) En déduire que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.
   (d) En déduire une estimation explicite du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision $\varepsilon = 10^{-p}$, avec $p \in \mathbb{N}$.
3. On souhaite approcher $\bar{x}$ avec une précision $|f(x_n)| \leq \varepsilon = 10^{-3}$.
   (a) Rappeler les itérations associées aux méthodes de Dichotomie, de Newton et de la Sécante, puis calculer les quatre premières itérations pour chacune de ces méthodes.
   (b) Expliquer pourquoi la méthode de Newton atteint la précision demandée beaucoup plus rapidement que les autres.

1) Existence, unicité et valeur exacte

La fonction f est polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2x > 0$ sur $I = [1, 2]$. f est donc strictement croissante sur I.

- $f(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0$
- $f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0$

D'après le **Théorème des Valeurs Intermédiaires** (et la stricte monotonie), l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** $\bar{x}$ dans $[1, 2]$. Puisque $\bar{x} > 0$ et $\bar{x}^2 = 2$, sa valeur exacte est bien entendu $\bar{x} = \sqrt{2}$.

2) Étude analytique de la méthode de Newton

La suite de Newton est donnée par : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, avec $x_0 = 1$.

a) Formule de récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f'(x_n) = 2x_n$. En substituant :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ &= \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 2)}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right). \end{aligned}$$

b) Minoration et inégalité d'erreur :

- *Montrons que $x_n \geq 1$ par récurrence :*
  - i) Initialisation : $x_0 = 1 \geq 1$.
  - ii) Hérédité : Supposons $x_n \geq 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 1 &= \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} - 1, \\ &= \frac{x_n^2 - 2x_n + 2}{2x_n}, \\ &= \frac{(x_n - 1)^2 + 1}{2x_n} > 0, \end{aligned}$$

    Donc $x_{n+1} \geq 1$.
  - iii) D'après principe de récurrence $x_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- *Établissons l'inégalité de l'erreur pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} - \sqrt{2}, \\ &= \frac{x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2}{2x_n}, \\ &= \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \end{aligned}$$

  Puisque $x_n \geq 1$, on a $2x_n \geq 2$, d'où $\frac{1}{2x_n} \leq \frac{1}{2}$. En passant à la valeur absolue, on obtient le résultat escompté :

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2$$

c) Majoration globale de l'erreur : Montrons par récurrence que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

- *Initialisation* : $|x_0 - \sqrt{2}| \approx 0{,}414$. Or $\frac{1}{2^{2^0}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. L'inégalité $0{,}414 \leq 0{,}5$ est vraie.
- *Hérédité* : Supposons la propriété vraie pour un rang n.

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \sqrt{2}| &\leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2, \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2, \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2\cdot 2^n}}, \\ &= \frac{1}{2^{2^{n+1}+1}}, \\ &\leq \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

- D'après principe de récurrence la propriété est donc démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Estimation du nombre d'itérations : Pour obtenir une précision $\epsilon = 10^{-p}$, il suffit de résoudre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-p} &\iff 2^{2^n} \geq 10^p \\ &\iff 2^n \ln(2) \geq p \ln(10) \\ &\iff 2^n \geq p\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \\ &\iff n \geq \log_2\left(p\frac{\ln(10)}{\ln(2)}\right) \approx \log_2(3{,}32 \cdot p) \end{aligned}$$

Ceci démontre mathématiquement l'hyper-efficacité de l'algorithme : le nombre d'itérations croît de façon logarithmique par rapport au nombre de décimales souhaitées.

3) Comparaison numérique et vitesses de convergence

On cherche la précision $\epsilon = 10^{-3}$ (donc 3 décimales exactes). La valeur cible est $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$.

a) Rappel des itérés et calculs :

Dichotomie ($a_0 = 1$, $b_0 = 2$) : $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$$f(x) = x^2 - 2$$

n	a_n	b_n	m_n	$\lvert f(m_n)\rvert$
0	1	2	1,5	0,25
1	1	1,5	1,25	0,4375
2	1,25	1,5	1,375	0,109375
3	1,375	1,5	1,4375	0,06640625

Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \qquad x_0 = 1$$

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1,000000	1,000000
1	1,500000	0,250000
2	1,416667	0,006944
3	1,414216	0,000006

Sécante

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad x_0 = 1,\ x_1 = 2$$

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1,000000	1,000000
1	2,000000	2,000000
2	1,333333	0,222222
3	1,400000	0,040000
4	1,414634	0,001190

b) Explication de la rapidité de Newton :

La méthode de Newton atteint la précision demandée dès la 3ème itération, beaucoup plus vite que les deux autres. Cela s'explique par **l'ordre de convergence** :

- La **Dichotomie** possède une convergence **linéaire** (ordre 1) : l'erreur est divisée par 2 à chaque étape.
- La **Sécante** possède une convergence **super-linéaire** (ordre $\approx 1{,}618$).
- La méthode de **Newton** possède une convergence **quadratique** (ordre 2). L'erreur est essentiellement élevée au carré à chaque étape lorsque l'itéré est suffisamment proche de la racine.

Résumé :

- **Dichotomie** — linéaire (ordre 1), taux 1/2 : gain de $\approx 0{,}30$ chiffre décimal par itération (≈ 10 itérations pour $\varepsilon = 10^{-3}$).
- **Sécante** — ordre $\approx 1{,}618$: plus rapide, sans f' explicite.
- **Newton** — **quadratique (ordre 2)** : le nombre de chiffres corrects double à chaque pas,

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}\, e_n^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e_n^2.$$

Newton atteint $\varepsilon = 10^{-3}$ en **3 itérations** seulement.

Conclusion : Newton exploite la pente $f'(x_n)$ pour une correction optimale, tandis que la dichotomie se contente de halver l'intervalle sans exploiter la forme de f.

Document rédigé par Mohamed Najib LAATABI UM5 Rabat, Faculté des Sciences