UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2025/2026
Licence PC S_4
Module : Analyse Numérique

TD3 : Interpolation polynomiale

Lagrange • Newton • Différences divisées • Vandermonde • Erreur d'interpolation

Exercice 1 Interpolation de Lagrange

Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right).$$

1. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
2. Utiliser ce polynôme pour approcher les valeurs $\sin(\frac{\pi}{3})$ et $\sin(\frac{2\pi}{5})$.

1) Construction du polynôme d'interpolation de Lagrange

Les points d'interpolation sont $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. On évalue f en ces nœuds :

$$y_0 = f(0) = 0, \qquad y_1 = f(1) = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 1, \qquad y_2 = f(3) = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Le polynôme de Lagrange de degré ≤ 2 s'écrit :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, \ell_i(x), \quad \text{où} \quad \ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

Puisque $y_0 = 0$, le terme $y_0\ell_0(x)$ est nul. On calcule seulement ℓ_1 et ℓ_2 :

$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = \frac{x(x-3)}{-2} = -\frac{1}{2}\,x(x-3),$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{x(x-1)}{6} = \frac{1}{6}\,x(x-1).$$

Le polynôme d'interpolation est alors :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1\cdot\ell_1(x) + 2\cdot\ell_2(x) \\ &= -\frac{1}{2}\,x(x-3) + \frac{2}{6}\,x(x-1) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right)x, \\ &= \frac{1}{6}\,x(7-x). \end{aligned}$$

Vérification : $P_2(0) = 0 = y_0$, $P_2(1) = \frac{6}{6} = 1 = y_1$, $P_2(3) = \frac{3(7-3)}{6} = \frac{12}{6} = 2 = y_2$.

2) Approximation des valeurs trigonométriques

Approximation de $\sin(\frac{\pi}{3})$

On cherche x tel que $\frac{\pi}{6}x = \frac{\pi}{3}$, soit $x = 2$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{f(2)}{2} \approx \frac{P_2(2)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(7-2)}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{6} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833.$$

(Valeur exacte : $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$; erreur absolue $\approx 0{,}032$.)

Approximation de $\sin(\frac{2\pi}{5})$

On cherche x tel que $\frac{\pi}{6}x = \frac{2\pi}{5}$, soit $x = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{f(2{,}4)}{2} \approx \frac{P_2(2{,}4)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2{,}4\,(7-2{,}4)}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2{,}4 \times 4{,}6}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11{,}04}{6} = 0{,}92.$$

(Valeur exacte : $\sin(\frac{2\pi}{5}) \approx 0{,}951$; erreur absolue $\approx 0{,}031$.)

Exercice 2 La forme récursive du polynôme d'interpolation de Newton

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -1, \quad f(4) = 1, \quad f(6) = -1.$$

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de f en 0, 1 et 4 par la méthode de Lagrange.
2. Déterminer le polynôme d'interpolation de f en 0, 1 et 4 par la méthode de Newton.
3. Quel est le polynôme d'interpolation de f en 0, 1, 4 et 6 ?
4. Estimer la valeur de $f(0{,}8)$.

1) Méthode de Lagrange sur les nœuds 0, 1, 4

Posons $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Les polynômes de base sont :

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(0-1)(0-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{4} = \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 4),$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)}{(1-0)(1-4)} = \frac{x(x-4)}{-3} = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x),$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(4-0)(4-1)} = \frac{x(x-1)}{12} = \frac{1}{12}(x^2 - x).$$

D'où :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 \cdot \ell_0(x) + (-1) \cdot \ell_1(x) + 1 \cdot \ell_2(x) \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 4) + \frac{1}{3}(x^2 - 4x) + \frac{1}{12}(x^2 - x). \end{aligned}$$

En réduisant les coefficients (diviseur commun 12) :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{3(x^2 - 5x + 4) + 4(x^2 - 4x) + (x^2 - x)}{12}, \\ &= \frac{1}{12}(8x^2 - 32x + 12), \\ &= 1 - 2x + \frac{2}{3}x(x-1). \end{aligned}$$

Vérification : $P_2(0) = 1, \quad P_2(1) = -1, \quad P_2(4) = 1.$ ✓

2) Méthode de Newton sur les nœuds 0, 1, 4

On dresse la table des différences divisées :

x_k	$f[x_k]$	Ordre 1	Ordre 2
0	1	$f[x_0, x_1] = \dfrac{-1-1}{1-0} = -2$	$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{\frac{2}{3} - (-2)}{4-0} = \dfrac{2}{3}$
1	-1	$f[x_1, x_2] = \dfrac{1-(-1)}{4-1} = \dfrac{2}{3}$	
4	1		

Le polynôme de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1 + (-2)(x - 0) + \frac{2}{3}\,x(x - 1) \\ &= 1 - 2x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x, \\ &= 1 - 2x + \frac{2}{3}x(x - 1). \end{aligned}$$

L'unicité du polynôme d'interpolation garantit l'égalité des deux résultats.

3) Polynôme d'interpolation sur les nœuds 0, 1, 4, 6

L'atout de la méthode de Newton est sa **récursivité** : l'ajout du nœud $x_3 = 6$ se réduit au calcul d'un seul coefficient supplémentaire.

$$P_3(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot x(x - 1)(x - 4).$$

On complète la table des différences divisées :

x_k	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
0	1	-2		
1	-1		$\dfrac{2}{3}$	
		$\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{6-0} = -\dfrac{1}{6}$
4	1		$\dfrac{-1-\frac{2}{3}}{6-1} = -\dfrac{1}{3}$	
		$\dfrac{-1-1}{6-4} = -1$		
6	-1			

D'où :

$$P_3(x) = 1 - 2x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-4),$$
$$= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{10}{3}x + 1.$$

Vérification : $P_3(6) = -36 + 54 - 20 + 1 = -1$.

4) Estimation de $f(0{,}8)$

$$\begin{aligned} P_3(0{,}8) &= P_2(0{,}8) - \frac{1}{6}(0{,}8)(0{,}8-1)(0{,}8-4) \\ &= \left(\frac{2}{3}(0{,}64) - \frac{8}{3}(0{,}8) + 1\right) - \frac{1}{6}(0{,}8)(-0{,}2)(-3{,}2) \\ &= \left(\frac{1{,}28 - 6{,}4 + 3}{3}\right) - \frac{0{,}512}{6} \\ &= -\frac{2{,}12}{3} - \frac{0{,}512}{6} \approx -0{,}792. \end{aligned}$$

Exercice 3 Forme explicite des différences divisées

Soit f la fonction définie sur $[1,2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \dfrac{(-1)^n}{x_0\, x_1 \cdots x_n}$.
2. En déduire le polynôme P_3 interpolant f aux points $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = 2$, sous la forme de Newton.

1) Démonstration par récurrence

Propriété $\mathcal{P}(n)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous nœuds $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et non nuls,

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0\, x_1 \cdots x_n}.$$

- **Initialisation.**
  - Pour $n = 0$: $\quad f[x_0] = f(x_0) = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{(-1)^0}{x_0}$. ✓
  - Pour $n = 1$:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x_1}{x_0\, x_1}}{x_1 - x_0} = \frac{-(x_1 - x_0)}{x_0\, x_1 (x_1 - x_0)} = \frac{-1}{x_0\, x_1} = \frac{(-1)^1}{x_0\, x_1}.$$ ✓

- **Hérédité.** Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire :

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{n+1}] - f[x_0, \ldots, x_n]}{x_{n+1} - x_0}.$$

  Par hypothèse de récurrence (appliquée à des tableaux de $n+1$ nœuds distincts) :

$$f[x_1, \ldots, x_{n+1}] = \frac{(-1)^n}{x_1 \cdots x_{n+1}}, \qquad f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 \cdots x_n}.$$

On substitue :

$$\begin{aligned} f[x_0,\dots,x_{n+1}] &= \frac{1}{x_{n+1}-x_0}\left(\frac{(-1)^n}{x_1\cdots x_{n+1}} - \frac{(-1)^n}{x_0\cdots x_n}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{x_{n+1}-x_0}\cdot\frac{1}{x_1\cdots x_n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_0}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{x_{n+1}-x_0}\cdot\frac{1}{x_1\cdots x_n}\cdot\frac{x_0-x_{n+1}}{x_0\,x_{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n}{x_{n+1}-x_0}\cdot\frac{-(x_{n+1}-x_0)}{x_0\,x_1\cdots x_{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n\cdot(-1)}{x_0\,x_1\cdots x_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{x_0\,x_1\cdots x_{n+1}}. \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f[x_0,x_1,\dots,x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0\,x_1\cdots x_n}.}$$

2) Polynôme P_3 sous la forme de Newton

Les nœuds sont $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{5}{3},\ x_3 = 2$. On lit directement les coefficients de Newton grâce à la formule démontrée :

k	x_k	Formule	Valeur
0	1	$f[x_0] = \dfrac{(-1)^0}{x_0} = \dfrac{1}{1}$	1
1	$\frac{4}{3}$	$f[x_0,x_1] = \dfrac{(-1)^1}{x_0\,x_1} = \dfrac{-1}{1\cdot\frac{4}{3}}$	$-\frac{3}{4}$
2	$\frac{5}{3}$	$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{(-1)^2}{x_0\,x_1\,x_2} = \dfrac{1}{1\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}}$	$\frac{9}{20}$
3	2	$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{(-1)^3}{x_0\,x_1\,x_2\,x_3} = \dfrac{-1}{1\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot 2}$	$-\frac{9}{40}$

Le polynôme de Newton est défini par $P_3(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} f[x_0,\dots,x_k]\,\omega_k(x)$, avec $\omega_0 = 1$ et $\omega_k(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$.

$$P_3(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{9}{20}(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right) - \frac{9}{40}(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right).$$

Après réduction (développement des produits) :

$$\boxed{P_3(x) = -\frac{9}{40}\,x^3 + \frac{27}{20}\,x^2 - \frac{119}{40}\,x + \frac{57}{20}.}$$

Vérification : $P_3(1) = 1 = f(1),\quad P_3(2) = \frac{1}{2} = f(2)$.

Intérêt de la formule explicite. Pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$, la formule $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{(-1)^n}{x_0 \cdots x_n}$ permet de lire *immédiatement* tous les coefficients de Newton, sans aucun calcul récursif. Cela réduit considérablement le coût par rapport à la construction itérative de la table des différences divisées.

Exercice 4 Erreur d'interpolation

Soit $f \in \mathcal{C}^4([-2, 4])$ telle que

$$f(-2) = -14, \quad f(-1) = -\frac{11}{4}, \quad f(2) = -8, \quad f(4) = -29.$$

1. Calculer le polynôme d'interpolation de f aux points -2, -1, 2, 4 par : (i) la matrice de Vandermonde, (ii) la base de Lagrange, (iii) l'approche de Newton.
2. Étudier l'erreur d'interpolation en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 3$, sachant que $\max\limits_{t\in[-2,4]} \left|f^{(4)}(t)\right| \leq 10^{-2}$.

1) Calcul du polynôme d'interpolation

Par le **théorème d'existence et d'unicité**, il existe un unique polynôme P_3 de degré ≤ 3 qui interpole f en ces quatre points. Les trois méthodes convergent toutes vers :

$$P_3(x) = \frac{1}{4}\,x^3 - 3\,x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1.$$

(i) Matrice de Vandermonde

On pose $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et on écrit les quatre conditions d'interpolation sous forme matricielle $V\,\mathbf{a} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -\frac{11}{4} \\ -8 \\ -29 \end{pmatrix}.$$

La résolution de ce système (par élimination de Gauss ou inversion de V) donne :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \tfrac{1}{2}, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = \tfrac{1}{4}.$$

D'où $P_3(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \dfrac{1}{2}x + 1$. ✓

(ii) Base de Lagrange

Avec $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, les polynômes de base sont :

$$\ell_0(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(-2+1)(-2-2)(-2-4)} = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(-1)(-4)(-6)} = -\frac{1}{24}(x+1)(x-2)(x-4),$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(-1+2)(-1-2)(-1-4)} = \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1)(-3)(-5)} = \frac{1}{15}(x+2)(x-2)(x-4),$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-4)}{(2+2)(2+1)(2-4)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-4)}{(4)(3)(-2)} = -\frac{1}{24}(x+2)(x+1)(x-4),$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(4+2)(4+1)(4-2)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(6)(5)(2)} = \frac{1}{60}(x+2)(x+1)(x-2).$$

Le polynôme de Lagrange est :

$$L_3(x) = -14\,\ell_0(x) - \frac{11}{4}\,\ell_1(x) - 8\,\ell_2(x) - 29\,\ell_3(x).$$

Après développement et réduction, on retrouve :

$$L_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 1. \quad \checkmark$$

(iii) Approche de Newton

On dresse la table complète des différences divisées :

x_k	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
-2	-14			
		$\frac{-\frac{11}{4}+14}{-1+2} = \frac{45}{4}$		
-1	$-\frac{11}{4}$		$\frac{-\frac{7}{4}-\frac{45}{4}}{2+2} = -\frac{13}{4}$	
		$\frac{-8+\frac{11}{4}}{2+1} = -\frac{7}{4}$		$\frac{\frac{1}{4}+\frac{13}{4}}{4+2} = \frac{1}{4}$
2	-8		$\frac{-\frac{21}{2}+\frac{7}{4}}{4+1} = -\frac{7}{4}$	
		$\frac{-29+8}{4-2} = -\frac{21}{2}$		
4	-29			

Le polynôme de Newton est donc :

$$N_3(x) = -14 + \frac{45}{4}(x+2) - \frac{13}{4}(x+2)(x+1) + \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-2).$$

Après développement, les trois méthodes confirment :

$$\boxed{P_3(x) = \frac{1}{4}\,x^3 - 3\,x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1.}$$

2) Étude de l'erreur d'interpolation

Théorème d'erreur d'interpolation. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ et P_n est le polynôme d'interpolation de f en $n+1$ nœuds $x_0 < \cdots < x_n$ dans $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in]a,b[$ tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,\pi_{n+1}(x), \quad \text{où} \quad \pi_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$

Ici $n = 3$, les nœuds sont $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, donc :

$$\pi_4(x) = (x+2)(x+1)(x-2)(x-4).$$

La majoration de l'erreur est :

$$|f(x) - P_3(x)| \le \frac{\max_{t\in[-2,4]} |f^{(4)}(t)|}{4!}\,|\pi_4(x)| \le \frac{10^{-2}}{24}\,|\pi_4(x)|.$$

On évalue $|\pi_4|$ en chacun des points demandés :

x	$\pi_4(x)$	Borne de l'erreur
0	$(2)(1)(-2)(-4) = 16$	$\lvert E_3(0)\rvert \leq \dfrac{16 \times 10^{-2}}{24} = \dfrac{2}{3} \times 10^{-2} \approx 6{,}67 \times 10^{-3}$
1	$(3)(2)(-1)(-3) = 18$	$\lvert E_3(1)\rvert \leq \dfrac{18 \times 10^{-2}}{24} = \dfrac{3}{4} \times 10^{-2} = 7{,}5 \times 10^{-3}$
3	$(5)(4)(1)(-1) = -20$	$\lvert E_3(3)\rvert \leq \dfrac{20 \times 10^{-2}}{24} = \dfrac{5}{6} \times 10^{-2} \approx 8{,}33 \times 10^{-3}$

Bilan des erreurs.

$$|f(0) - P_3(0)| \leq \frac{2}{3} \times 10^{-2} \approx 6{,}67 \times 10^{-3},$$
$$|f(1) - P_3(1)| \leq \frac{3}{4} \times 10^{-2} = 7{,}50 \times 10^{-3},$$
$$|f(3) - P_3(3)| \leq \frac{5}{6} \times 10^{-2} \approx 8{,}33 \times 10^{-3}.$$

Le point $x = 3$, situé entre les nœuds $x_2 = 2$ et $x_3 = 4$, donne la borne d'erreur la plus grande car $|\pi_4(3)| = 20$ est le plus élevé.

Document rédigé par Mohamed Najib LAATABI UM5 Rabat, Faculté des Sciences